

# THEORETISCHE PHYSIK FÜR STUDENTEN



WICHTIGE THEMEN  
EINFACH  
ERKLÄRT

ALEXANDER FUFÄEV



# Hallöchen!

Mein Name ist Alexander FufaeV. Du kennst mich wahrscheinlich von meiner Website [fufaev.org](http://fufaev.org). Ich bin freiberuflicher theoretischer Physiker und erkläre dir in diesem Buch die theoretische Physik, die du im Physikstudium lernst oder gelernt hast, aber nicht verstanden hast. Dieses Buch soll das **Verständnis der wichtigsten Themen der theoretischen Physik im Grundstudium erleichtern**.



Es setzt Grundkenntnisse in Vektorrechnung, Differential- und Integralrechnung voraus. Wenn dir diese Konzepte neu sind, solltest du sie dir zuerst aneignen, bevor du dich diesem Buch widmest.

Die wöchentlichen Übungsaufgaben im Grundstudium sind anspruchsvoll und erfordern viel Zeit. Es kann schnell passieren, dass man viele Themen nicht versteht und mit den Übungszetteln nicht mithalten kann. Das kann dazu führen, dass man die Studienleistung nicht erbringt oder durch die Klausuren am Ende des Semesters fällt.

Ich habe das Grundstudium hinter mir und weiß im Rückblick ganz genau, was ich in den Modulen zur theoretischen Physik gebraucht hätte, um die

Studienleistungen zu erbringen und um die Klausuren zu bestehen. Ein grundlegendes, intuitives Verständnis der Themen wäre unerlässlich gewesen, da ich oft nicht wusste, was die Aufgabenstellung von mir verlangte. In einigen Fällen verstand ich zwar die Aufgabenstellung, wusste jedoch nicht, wie ich sie angehen sollte. Es gab auch Aufgaben, die ich berechnen konnte, aber ich war mir nicht sicher, was und warum ich etwas berechnete.

Wenn du dieses Buch vom ersten bis zum letzten Kapitel durchgearbeitet hast, wirst du die **Übungsaufgaben in der theoretischen Physik viel leichter meistern** und die **Klausuren leichter bestehen**.

Möge die Physik mit dir sein!

A. FufaeV

# Was du hier lernst

I

## Mathematisches Werkzeug

<b>1</b>	<b>Differentialgleichungen</b> .....	<b>11</b>
1.1	Was ist eine Differentialgleichung (DGL)? .....	12
1.2	Unterschiedliche Schreibweise einer DGL .....	14
1.3	Was soll ich mit einer DGL tun? .....	15
1.4	Differentialgleichungen erkennen .....	16
1.5	<b>Eine DGL klassifizieren</b> .....	<b>17</b>
1.5.1	Gewöhnlich oder partiell? .....	19
1.5.2	Von welcher Ordnung ist eine DGL? .....	20
1.5.3	Linear oder nicht-linear? .....	21
1.5.4	Lineare DGL. Homogen oder inhomogen? .....	22
<b>1.6</b>	<b>Nebenbedingungen</b> .....	<b>23</b>
1.6.1	Anfangsbedingungen .....	24
1.6.2	Randbedingungen .....	25

<b>2</b>	<b>Tensoren</b>	<b>27</b>
2.1	Tensoren nullter und erster Stufe	27
2.2	Tensoren zweiter Stufe	29
2.3	Tensoren höherer Stufen	30
2.4	Symmetrische und antisymmetrische Tensoren	30
2.5	Rechnen mit Tensoren	32
2.5.1	Addition von Tensoren	32
2.5.2	Subtraktion von Tensoren	33
2.5.3	Das äußere Produkt von Tensoren (Tensorprodukt)	33
2.5.4	Kontraktion (Verjüngung) von Tensoren	35
2.6	<b>Kronecker-Delta</b>	<b>36</b>
2.6.1	Kronecker-Delta ist symmetrisch	38
2.6.2	Mit Kronecker-Delta kontrahieren	38
2.6.3	Kronecker-Delta summieren	38
2.6.4	Skalarprodukt in Indexnotation	39
2.7	<b>Levi-Civita-Symbol</b>	<b>41</b>
2.7.1	Kreuzprodukt in Indexnotation	43
<b>3</b>	<b>Dirac-Delta</b>	<b>47</b>
3.1	Dirac-Delta im Koordinatenursprung	49
3.2	Verschobenes Dirac-Delta	50
3.3	Eigenschaften des Dirac-Delta	52
3.4	Analogie zum Kronecker-Delta	52
3.5	Dreidimensionales Dirac-Delta	53
<b>4</b>	<b>Vektorfelder</b>	<b>55</b>
<b>5</b>	<b>Nabla-Operator</b>	<b>57</b>
5.1	Gradient	58

<b>5.2</b>	<b>Divergenz</b> .....	<b>60</b>
5.2.1	Positive Divergenz = Quelle .....	61
5.2.2	Negative Divergenz = Senke .....	62
5.2.3	Divergenzfreies Vektorfeld .....	63
<b>5.3</b>	<b>Rotation</b> .....	<b>65</b>
<b>6</b>	<b>Gauß-Integralsatz</b> .....	<b>67</b>
6.1	Das Flächenintegral im Gauß-Integralsatz .....	67
6.2	Das Volumenintegral im Gauß-Integralsatz .....	71
<b>7</b>	<b>Stokes-Integralsatz</b> .....	<b>75</b>
7.1	Das Linienintegral im Stokes-Integralsatz .....	76
7.2	Das Flächenintegral im Stokes-Integralsatz .....	78
<b>8</b>	<b>Fourier-Reihe</b> .....	<b>83</b>
8.1	Das Konzept von Fourier-Reihen .....	84
8.2	Fourier-Koeffizienten .....	86
8.3	Fourier-Basis .....	88
8.4	Beispiel: Fourier-Reihe für die Sägezahnfunktion .....	90

## II

## Die Natur ist extremal

<b>9</b>	<b>Wirkungsfunktional</b> .....	<b>97</b>
<b>10</b>	<b>Euler-Lagrange-Gleichung</b> .....	<b>101</b>
10.1	Lagrange-Funktion .....	102
10.2	How To: Euler-Lagrange-Gleichung .....	103
10.2.1	Ester Schritt: Generalisierte Koordinaten festlegen .....	103
10.2.2	Zweiter Schritt: Lagrange-Funktion aufstellen .....	103
10.2.3	Dritter Schritt: Ableitungen berechnen .....	104

10.2.4	Vierter Schritt: Aufgestellte Differentialgleichungen lösen	106
10.2.5	Fünfter Schritt: Randbedingungen einsetzen	106

## III      **Elektromagnetismus**

<b>11</b>	<b>Elektrisches Vektorfeld</b>	<b>111</b>
<b>12</b>	<b>Magnetisches Vektorfeld</b>	<b>115</b>
<b>13</b>	<b>Maxwell-Gleichungen im Vakuum</b>	<b>119</b>
13.1	Integrale und differentielle Darstellungsform	120
13.2	Elektrischer und magnetischer Fluss	122
13.3	Elektrische und magnetische Spannung	123
13.4	Die erste Maxwell-Gleichung	125
13.4.1	Makroskopische Darstellung	125
13.4.2	Mikroskopische Darstellung	126
13.5	Die zweite Maxwell-Gleichung	128
13.5.1	Makroskopische Darstellung	128
13.5.2	Mikroskopische Darstellung	129
13.6	Die dritte Maxwell-Gleichung	130
13.6.1	Makroskopische Darstellung	130
13.6.2	Mikroskopische Darstellung	133
13.7	Die vierte Maxwell-Gleichung	134
13.7.1	Makroskopische Darstellung	134
13.7.2	Ampere-Gesetz	136
13.7.3	Mikroskopische Darstellung	136
<b>14</b>	<b>Elektromagnetische Wellen</b>	<b>139</b>
14.1	Wellengleichung für das $E$ -Feld	142
14.2	Wellengleichung für das $B$ -Feld	144



<b>14.3</b>	<b>Ein paar Hinweise</b> .....	<b>145</b>
-------------	--------------------------------	------------

## **IV**

## **Die Quantenwelt**

<b>15</b>	<b>Schrödinger-Gleichung</b> .....	<b>151</b>
<b>15.1</b>	<b>Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung</b> .....	<b>155</b>
15.1.1	Energieerhaltungssatz .....	155
15.1.2	Welle-Teilchen-Dualismus .....	155
15.1.3	Ebene Welle .....	157
15.1.4	Wellengleichung .....	160
<b>15.2</b>	<b>Interpretation der Wellenfunktion</b> .....	<b>162</b>
15.2.1	Aufenthaltswahrscheinlichkeit .....	163
15.2.2	$ \Psi ^2$ graphisch .....	163
<b>15.3</b>	<b>Normierung der Wellenfunktion</b> .....	<b>164</b>
15.3.1	Beispiel: Eine Wellenfunktion normieren .....	166
<b>15.4</b>	<b>Dreidimensionale Schrödinger-Gleichung</b> .....	<b>167</b>
<b>15.5</b>	<b>Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung</b> .....	<b>169</b>
<b>15.6</b>	<b>Stationäre Wellenfunktion</b> .....	<b>169</b>
<b>15.7</b>	<b>Hamilton-Operator</b> .....	<b>173</b>
<b>15.8</b>	<b>Was du mitnehmen sollst</b> .....	<b>174</b>
<b>16</b>	<b>Bra-Ket-Notation</b> .....	<b>177</b>
<b>16.1</b>	<b>Bra- and Ket-Zustandsvektoren</b> .....	<b>180</b>
16.1.1	Ket-Vektor .....	180
16.1.2	Bra-Vektor .....	180
<b>16.2</b>	<b>Skalar- und inneres Produkt</b> .....	<b>181</b>
<b>16.3</b>	<b>Kontinuierliche Quantenzustände</b> .....	<b>182</b>
16.3.1	Überlapp der Quantenzustände .....	183
<b>16.4</b>	<b>Orthonormierte Quantenzustände</b> .....	<b>184</b>
<b>16.5</b>	<b>Tensorprodukt in Bra-Ket-Notation</b> .....	<b>185</b>

<b>16.6</b>	<b>Projektionsmatrizen</b> .....	<b>186</b>
16.6.1	Basiswechsel mit den Projektionsmatrizen .....	186
<b>16.7</b>	<b>Schrödinger-Gleichung in Bra-Ket-Notation</b> .....	<b>189</b>
<b>16.8</b>	<b>Mittelwerte in Bra-Ket-Notation</b> .....	<b>189</b>
<b>17</b>	<b>Operatoren als Matrizen darstellen</b> .....	<b>191</b>
<b>18</b>	<b>Hermitesche Operatoren</b> .....	<b>193</b>
18.1	Nützliche Eigenschaften von Hermiteschen Operatoren ...	195
18.2	Beispiele für Hermitesche Matrizen .....	196
<b>19</b>	<b>Quantenmechanischer Drehimpuls</b> .....	<b>197</b>
19.1	Drehimpuls im Experiment messbar? .....	199
19.2	Alle Drehimpulskomponenten exakt bestimmen? .....	200
19.3	Drehimpulsquantenzahlen $l$ und $m$ .....	206

# Mathematisches Werkzeug

<b>1</b>	<b>Differentialgleichungen</b> .....	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Tensoren</b> .....	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>Dirac-Delta</b> .....	<b>47</b>
<b>4</b>	<b>Vektorfelder</b> .....	<b>55</b>
<b>5</b>	<b>Nabla-Operator</b> .....	<b>57</b>



# 1. Differentialgleichungen

**Mehr:** [de.fufaev.org/differentialgleichungen](https://de.fufaev.org/differentialgleichungen)

Wenn du vorhast, dich zum Beispiel...

- mit der atomaren Welt,
- mit der Bewegung der Planeten,
- mit chemischen Prozessen,
- mit elektrischen Schaltungen,
- mit Wettervorhersagen
- oder mit der Ausbreitung eines Virus zu beschäftigen,

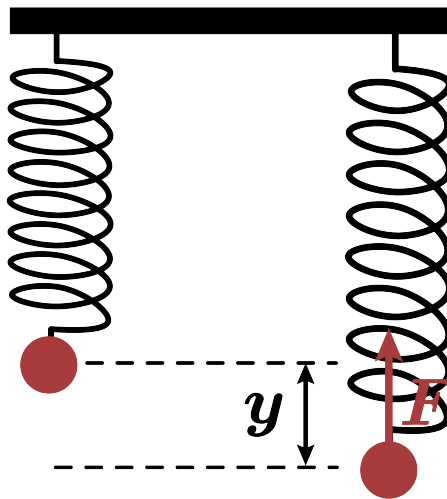
dann wirst du irgendwann auf **Differentialgleichungen** stoßen. Differentialgleichungen begegnen dir in jedem Teilgebiet der theoretischen Physik, daher ist es wichtig zu verstehen, wie man mit Differentialgleichungen arbeitet.

## 1.1 Was ist eine Differentialgleichung (DGL)?

Schauen wir uns als ein einfaches Beispiel das Hooke-Gesetz an:

$$F = -Dy \quad (1.1)$$

Dieses Gesetz beschreibt die **rücktreibende Kraft**  $F$  auf eine Masse, die an einer Feder dranhängt. Diese Kraft erfährt die Masse, wenn du sie um die **Strecke**  $y$  aus der Ruhelage auslenkst.  $D$  ist hierbei ein konstanter Koeffizient, der beschreibt, wie schwer es ist, die Feder zu dehnen oder zu stauchen.



Die **Masse**  $m$  ist in der Kraft versteckt. Wir können die Kraft nach dem zweiten Newton-Axiom als  $ma$  schreiben:

$$ma = -Dy \quad (1.2)$$

Hierbei ist  $a$  die **Beschleunigung**, die die Masse erfährt, wenn sie um  $y$  aus der Ruhelage ausgelenkt ist. Sobald du an der Masse ziehst und sie loslässt, wird die Feder anfangen, hin und her zu schwingen. Ohne Reibung, wie in diesem Fall, wird sie niemals zum Stillstand kommen.

Während die Masse schwingt, ändert sich natürlich die Auslenkung  $y$ . Die

Auslenkung ist also abhängig von der Zeit  $t$ . Damit ist auch die Beschleunigung  $a$  abhängig von der Zeit. Die Masse bleibt natürlich zu jedem Zeitpunkt gleich, egal wie stark die Feder ausgelenkt ist. Das gilt in guter Näherung auch für die Federkonstante  $D$ :

$$m a(t) = -D y(t) \quad (1.3)$$

Wenn wir nur noch  $m$  auf die andere Seite bringen, können wir mit dieser Gleichung zu jeder Auslenkung  $y$  die Beschleunigung berechnen, die die Masse erfährt:

$$a(t) = -\frac{D}{m} y(t) \quad (1.4)$$

Doch was ist, wenn wir an der Frage interessiert sind: **Bei welcher Auslenkung  $y$  wird die Feder nach 24 Sekunden sein?**

Um eine derartige Zukunftsfrage beantworten zu können, müssen wir wissen, wie genau  $y$  von der Zeit  $t$  abhängt. Wir wissen eben nur, DASS  $y$  von der Zeit abhängt, aber nicht WIE.

Und genau bei solchen Zukunftsfragen kommen Differentialgleichungen ins Spiel. Wir können leicht zeigen, dass die Beschleunigung  $a$  die zweite Zeitableitung des zurückgelegten Wegs ist, also in unserem Fall ist es die zweite Ableitung von  $y$  nach der Zeit  $t$ :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\frac{D}{m} y(t) \quad (1.5)$$

Und schon haben wir eine Differentialgleichung für die Auslenkung  $y(t)$  aufgestellt! Eine Differentialgleichung (kurz: DGL) erkennst du daran, dass in ihr **neben der gesuchten Funktion  $y(t)$  auch Ableitungen dieser Funktion vorkommen**. Wie in diesem Fall die zweite Ableitung von  $y$  nach der Zeit  $t$ .

Wir können also zusammenfassend sagen: **Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung, die eine gesuchte Funktion und Ableitungen dieser**

Funktion enthält.

## 1.2 Unterschiedliche Schreibweise einer DGL

Du wirst sicherlich vielen Schreibweisen einer DGL begegnen. Wir haben unsere aufgestellte DGL 1.5 für die Federschwingung einer Masse in einer sogenannten **Leibniz-Notation** aufgeschrieben. Hier ist sie nochmal:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{D}{m}y(t) \quad (1.6)$$

Dieser wirst du oft **in der Physik** begegnen. Wir können sie auch etwas kompakter aufschreiben, ohne die Zeitabhängigkeit zu erwähnen:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{D}{m}y \quad (1.7)$$

Wenn die Funktion  $y(t)$  nur von der Zeit  $t$  abhängt, dann können wir die Zeitableitung noch kompakter mit der sogenannten **Newton-Notation** aufschreiben. Eine Zeitableitung von  $y$  entspricht einem Punkt über dem  $y$ . Bei zwei Ableitungen wie in unserem Fall wären es also zwei Punkte über der Funktion:

$$\ddot{y} = -\frac{D}{m}y \quad (1.8)$$

Offensichtlich ist diese Notation für die Betrachtung der zehnten Ableitung eher ungeeignet.

Eine andere Schreibweise, die du eher aus der Mathematik kennst, ist die **Lagrange-Notation**. Hier werden für die Ableitungen Striche verwendet. Für die zweite Ableitung also zwei Striche:

$$y'' = -\frac{D}{m}y \quad (1.9)$$

Bei der Lagrange-Notation sollte aus dem Kontext klar sein, nach welcher Variablen abgeleitet wird. Ist dies nicht der Fall, muss explizit angegeben



werden, von welcher Variablen  $y$  abhängt:

$$y''(t) = -\frac{D}{m}y(t) \quad (1.10)$$

Jede Schreibweise hat ihre Vor- und Nachteile. Es ist jedoch zu beachten, dass es sich nur um verschiedene **Schreibweisen** handelt, die die **gleiche Physik** beschreiben. Das Umformen und Umbenennen ändert nichts an der Physik unter der Haube einer DGL. Wir könnten die Auslenkung genauso  $x$  nennen:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{D}{m}x(t) \quad (1.11)$$

## 1.3 Was soll ich mit einer DGL tun?

Um unsere ursprüngliche Frage: »Bei welcher Auslenkung wird die Feder nach 24 Sekunden sein?« beantworten zu können, müssen wir die aufgestellte **Differentialgleichung lösen**. Eine DGL zu lösen, bedeutet, dass du herausfinden musst, **wie** die gesuchte Funktion  $y(t)$  genau von der Variablen  $t$  abhängt:  $y(t) = \dots$

Für einfache Differentialgleichungen, wie die der schwingenden Masse, gibt es Lösungsmethoden, die du anwenden kannst, um die gesuchte Funktion  $y(t)$  herauszufinden. Bedenke jedoch, dass es **kein allgemeines Rezept** gibt, wie du eine beliebige Differentialgleichung lösen kannst. Für manche DGL **gibt es nicht mal eine analytische Lösung!** Mit »nicht analytisch« ist gemeint, dass du keine konkrete Gleichung für die Funktion  $y(t) = \dots$  aufschreiben kannst.

Nicht analytisch lösbare Differentialgleichungen können wir nur am Computer **numerisch lösen**. Dann spuckt der Computer eben keine konkrete Formel  $y(t) = \dots$  heraus, sondern Datenpunkte  $y(t_1), y(t_2), y(t_3), \dots$ , die du in einem  $y$ - $t$ -Diagramm darstellen und daran die numerisch gelöste Funktion  $y(t)$  untersuchen kannst.

## 1.4 Differentialgleichungen erkennen

Sobald du auf eine Differentialgleichung triffst, ist es als erstes wichtig herauszufinden,

- was die **gesuchte Funktion** ist
- und **von welchen Variablen** sie abhängt.

Bei unserer DGL 1.5 der schwingenden Masse heißt die gesuchte Funktion  $y(t)$  und sie hängt von der Variablen  $t$  ab:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\frac{D}{m} y(t) \quad (1.12)$$

Schau dir mal als Beispiel die dreidimensionale Wellengleichung an, die das elektrische Feld  $E$  einer elektromagnetischen Welle beschreibt, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  ausbreitet:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (1.13)$$

Was ist die gesuchte Funktion in dieser DGL? Es ist die Funktion  $E$ . Warum? Weil die DGL die Ableitungen von  $E$  enthält. Von welchen Variablen ist die Funktion abhängig? Die Abhängigkeit ist hier nicht explizit angegeben, aber am geschwungenen Del-Zeichen  $\partial$  kannst du sofort erkennen, dass sie von mehreren Variablen abhängen muss. An den Ableitungen in der DGL kannst du sofort sehen, dass das gesuchte elektrische Feld von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $t$  abhängt. Also von insgesamt vier Variablen:  $E(x, y, z, t)$ .

Schauen wir uns ein etwas komplexeres Beispiel an. Dieses **System von Differentialgleichungen** beschreibt, wie sich eine Masse in einem

Gravitationsfeld bewegt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = G \frac{m}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.14)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = G \frac{m}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.15)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = G \frac{m}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.16)$$

Du hast ein sogenanntes **gekoppeltes Differentialgleichungssystem** vor dir. In diesem Fall reicht eine einzige Differentialgleichung nicht aus, um die Bewegung einer Masse im Gravitationsfeld zu beschreiben. Hier werden sogar drei Funktionen gesucht, nämlich die Bahnkurven  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$ , die eine Position  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  der Masse im dreidimensionalen Raum bestimmen. Jede Funktion beschreibt die Bewegung in einer der drei Raumrichtungen.

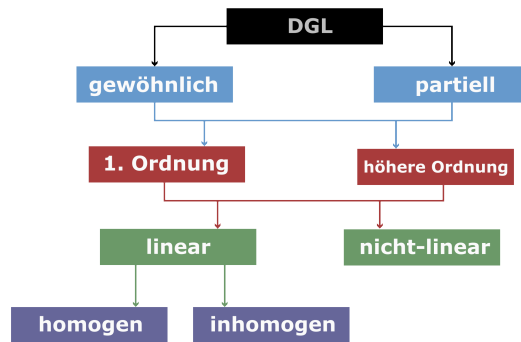
Mit »gekoppelt« ist gemeint, dass zum Beispiel in der ersten DGL für die Funktion  $x(t)$ , auch die Funktion  $y(t)$  vorkommt. Wir können also nicht einfach die erste DGL unabhängig von der zweiten DGL lösen, weil die zweite DGL uns verrät, wie sich das in der ersten DGL verhält. In allen drei DGLs kommen die gesuchten Funktionen vor, das heißt wir müssen alle drei DGLs **gleichzeitig** lösen. Wie das genau geht, lernst du vielleicht in den Mathematikvorlesungen.

## 1.5 Eine DGL klassifizieren

Es gibt viele verschiedene Differentialgleichungen. Aber wenn du genau hinsiehst, wirst du feststellen, dass einige Differentialgleichungen Ähnlichkeiten untereinander haben.

Nachdem du herausgefunden hast, was die gesuchte Funktion ist und von welchen Variablen sie abhängt, solltest du einige weitere grundlegende Fragen beantworten, **um die passende Lösungsmethode** für die DGL auszuwählen. Wir müssen die **DGL klassifizieren**:

- **Ist die DGL gewöhnlich oder partiell?** Partielle Differentialgleichungen beschreiben mehrdimensionale Probleme und sind deutlich komplexer.
- **Welche Ordnung hat die DGL?** Differentialgleichungen 1. Ordnung sind meist einfach zu lösen und beschreiben z.B. exponentielles Verhalten wie den radioaktiven Zerfall oder die Abkühlung einer Flüssigkeit. Differentialgleichungen 2. Ordnung sind dagegen etwas komplexer und kommen auch in der Natur häufig vor. Die Maxwell-Gleichungen in der Elektrodynamik, die Schrödinger-Gleichung in der Quantenmechanik - all das sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Erst ab der 2. Ordnung kann eine DGL eine Schwingung beschreiben.
- **Ist die DGL linear oder nichtlinear?** Für lineare DGL gilt das Superpositionsprinzip, was z.B. bei der Beschreibung elektromagnetischer Phänomene sehr nützlich ist. Nichtlineare DGL sind wesentlich komplexer und kommen z.B. in der nichtlinearen Elektronik zur Beschreibung supraleitender Ströme vor. Außerdem kann Chaos nur bei nichtlinearen Differentialgleichungen dritter oder höherer Ordnung auftreten. Sobald man auf eine nichtlineare DGL stößt, kann man eigentlich gleich Stift und Papier wegwerfen und die DGL direkt am Computer numerisch behandeln. Die meisten nichtlinearen DGL können nicht einmal analytisch gelöst werden!
- **Ist die lineare DGL homogen oder inhomogen?** Homogene lineare DGL sind einfacher als inhomogene und beschreiben z.B. eine ungestörte Schwingung, während inhomogene DGL in der Lage sind, auch von außen gestörte Schwingungen zu beschreiben.



Nachdem du eine DGL klassifiziert hast, kannst du gezielt eine geeignete Lösungsmethode anwenden, um die DGL zu lösen. Auch wenn es keine konkrete Lösungsmethode gibt, weist du durch die Klassifizierung, wie komplex eine DGL ist.

Lass uns die DGL für die schwingende Feder, Wellengleichung, Masse im Gravitationsfeld und für das Zerfallsgesetz klassifizieren.

### 1.5.1 Gewöhnlich oder partiell?

Schauen wir uns die DGL für die schwingende Masse an:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{D}{m} y(t) = 0 \quad (1.17)$$

Das ist eine **gewöhnliche** Differentialgleichung. Gewöhnlich bedeutet, dass die gesuchte Funktion  $y(t)$  nur von einer **einzigen** Variablen abhängt. In diesem Fall von der Zeit  $t$ .

Wie sieht es mit der Wellengleichung für das elektrische Feld aus?

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (1.18)$$

Das ist eine **partielle** Differentialgleichung. »Partiell« bedeutet, dass die gesuchte Funktion von **mindestens zwei** Variablen abhängt und es **kommen Ableitungen nach diesen Variablen vor**. In diesem Fall hängt die gesuchte Funktion  $E$  von vier Variablen:  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $t$  ab. Und in der DGL

kommen auch Ableitungen nach diesen Variablen vor.

## 1.5.2 Von welcher Ordnung ist eine DGL?

Die DGL für die schwingende Masse ist eine Differentialgleichung **2. Ordnung**. Die Ordnung einer DGL ist die **höchste vorkommende Ableitung** der gesuchten Funktion:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{D}{m}y = 0 \quad (1.19)$$

Da in der DGL die zweite Ableitung die höchste und sogar die einzig vorkommende Ableitung von ist, handelt es sich bei der schwingenden Masse an der Feder um die DGL 2. Ordnung.

### 1.5.2.1 Ordnung einer DGL reduzieren

Es ist immer möglich eine DGL höherer Ordnung **in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung umzuwandeln**. Manchmal ist dieses Vorgehen beim Lösen einer DGL hilfreich.

Wir können beispielsweise die DGL 1.19 für die schwingende Masse an der Feder (DGL zweiter Ordnung) **in zwei gekoppelte Differentialgleichungen 1. Ordnung** umwandeln. Dazu müssen wir lediglich eine neue Funktion einführen, nennen wir sie  $v$  und definieren sie als die erste Zeitableitung von der gesuchten Funktion  $y$ :

$$v = \frac{dy}{dt} \quad (1.20)$$

Das ist auch schon **eine der beiden** gekoppelten DGL 1. Ordnung. Jetzt müssen wir nur noch die zweite Ableitung in der ursprünglichen DGL mit der Ableitung von  $v$  ausdrücken. Dann bekommen wir die zweite DGL 1. Ordnung. Die beiden gekoppelten DGL lauten:

$$v - \frac{dy}{dt} = 0 \quad (1.21)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{D}{m}y = 0 \quad (1.22)$$

Die beiden DGL sind gekoppelt. Wir müssen sie daher gleichzeitig lösen. Sie sind gekoppelt, weil  $y$  in der ersten DGL vorkommt und  $v$  in der zweiten DGL.

Auf diese Weise kannst du immer vorgehen, wenn du die **Ordnung einer DGL reduzieren willst**. Der Preis, den du dafür bezahlen musst, sind zusätzliche gekoppelte Differentialgleichungen.

Machen wir weiter. Von welcher Ordnung ist die **DGL für das Zerfallsgesetz**?

$$-\lambda N = \frac{dN}{dt} \quad (1.23)$$

Das ist eine Differentialgleichung **1. Ordnung**, weil die höchste vorkommende Ableitung der gesuchten Funktion  $N(t)$  die erste Ableitung ist.

### 1.5.3 Linear oder nicht-linear?

Die DGL für die schwingende Masse ist außerdem **linear**:

$$\left(\frac{dy}{dt^2}\right)^1 + \frac{D}{m}y^1 = 0 \quad (1.24)$$

»Linear« bedeutet, dass die **gesuchte Funktion und ihre Ableitungen nur Potenzen von 1 enthalten** und es kommen **keine Produkte von Ableitungen** mit der Funktion vor, wie  $y^2$  oder  $y\ddot{y}$ . Es kommen auch **keine verketteten Funktionen**, wie  $\sin(y(t))$  oder  $\sqrt{y(t)}$  vor. Bei Produkten, Verkettungen und höheren Potenzen sprechen wir von **nichtlinearen** DGL.

**Beachte!** Das »hoch zwei« in der zweiten Ableitung in der Leibniz-Notation  $\frac{dy}{dt^2}$  ist keine Potenz der Ableitung, sondern lediglich eine Schreibweise dafür, dass es sich um die zweite Ableitung handelt.

Das Zerfallsgesetz ist auch linear:

$$-\lambda N^1 = \left(\frac{dN}{dt}\right)^1 \quad (1.25)$$

Wie sieht es mit der Wellengleichung aus? Sie ist auch linear:

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\right)^1 + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\right)^1 + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right)^1 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right)^1 \quad (1.26)$$

Das gekoppelte DGL-System für die Bewegung einer Masse im Gravitationsfeld ist dagegen nichtlinear, weil dort höhere Potenzen der gesuchten Funktionen  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$  vorkommen, nämlich  $x^2$ ,  $y^2$  und  $z^2$ .

### 1.5.4 Lineare DGL. Homogen oder inhomogen?

Bei homogenen und inhomogenen Typen von Differentialgleichungen sind die **Koeffizienten entscheidend**, die mit der gesuchten Funktion und ihren Ableitungen multipliziert sind. Bei einigen Lösungsmethoden ist es wichtig zu unterscheiden zwischen...

- **konstanten** Koeffizienten - diese **hängen nicht** von den Variablen ab, von denen auch die gesuchte Funktion abhängt.
- **nicht-konstanten** Koeffizienten - diese **hängen** von den Variablen ab, von denen die gesuchte Funktion abhängt.

Ein Koeffizient muss nicht unbedingt mit der gesuchten Funktion oder ihrer Ableitung multipliziert werden. Der Koeffizient kann auch alleine stehen! In diesem Fall wird der Koeffizient als **Störfunktion** bezeichnet.

Schauen wir uns nochmal die DGL für die schwingende Masse an:

$$1 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{D}{m} y = 0 \quad (1.27)$$

In dieser DGL gibt es einen interessanten Koeffizienten, der mit der gesuchten Funktion  $y$  multipliziert ist, nämlich  $\frac{D}{m}$ . Genau genommen, steht vor der zweiten Ableitung auch ein Koeffizient, nämlich **1** und der alleinstehende Koeffizient, also die Störfunktion, ist hier **0**. Wenn die **Störfunktion Null** ist, dann nennen wir die lineare Differentialgleichung **homogen**.

Die Wellengleichung hat auch keine Störfunktion (keinen alleinstehenden



Koeffizienten). Die DGL ist also homogen:

$$1 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + 1 \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + 1 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (1.28)$$

Die DGL für eine **erzwungene Schwingung** ist dagegen **inhomogen**:

$$1 \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{dy}{dt} + \frac{D}{m} y = F(t) \quad (1.29)$$

Hier entspricht die externe Kraft  $F(t)$  der Störfunktion. Wie du siehst, steht sie ganz allein da, ohne mit der gesuchten Funktion  $y(t)$  oder ihren Ableitungen multipliziert zu sein. Außerdem ist die Störfunktion zeitabhängig, sie ist also ein nicht-konstanter Koeffizient.

## 1.6 Nebenbedingungen

Eine Differentialgleichung allein reicht nicht aus, um ein physikalisches System **eindeutig** zu beschreiben. Die Lösung einer Differentialgleichung beschreibt **viele** mögliche Systeme, die ein bestimmtes Verhalten zeigen.

Zum Beispiel beschreibt die Lösung  $N(t)$  des Zerfallsgesetzes ein **exponentielles** Verhalten. Das Wissen um ein exponentielles Verhalten **reicht aber nicht aus**, um konkret sagen zu können, wie viele Atomkerne  $N(t = 10)$  nach 10 Sekunden zerfallen sind.

Genau aus diesem Grund hat jede DGL in der Regel sogenannte **Nebenbedingungen**. Dies sind zusätzliche Informationen, die zu einer DGL gegeben sein müssen, um die **Lösung der DGL konkret zu bestimmen**. Die Anzahl der notwendigen Nebenbedingungen hängt von der Ordnung der DGL ab.

- Für eine DGL 1. Ordnung ist eine **einzige Nebenbedingung** notwendig: Ein Funktionswert der gesuchten Funktion:  $y(t)$ . Für das Zerfallsgesetz sollte beispielsweise bekannt sein, wie viele noch nicht zerfallene Atomkerne  $N(t = 0)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  da waren. Zum Beispiel 1000 Atomkerne. Dann lautet die Nebenbedingung:

$$N(0) = 1000.$$

- Für eine DGL 2. Ordnung sind **zwei Nebenbedingungen** notwendig: Ein Funktionswert der gesuchten Funktion  $y(t)$  und  $y'(t)$ . Für die schwingende Masse sollte beispielsweise bekannt sein, welche Auslenkung  $y(t = 0)$  die Feder zum Zeitpunkt  $t = 0$  hatte, z.B.  $y(0) = 1$  und wie groß die Geschwindigkeit  $y'(t = 0)$  die Masse zu diesem Zeitpunkt war, z.B.  $y'(0) = 0$ .
- Für eine DGL 3. Ordnung wären dann **drei Nebenbedingungen** notwendig, damit die Lösung der DGL das betrachtete System eindeutig beschreibt: Ein Funktionswert  $y(t) = A$  der gesuchten Funktion, ein Funktionswert  $y'(t) = B$  z.B. ihrer ersten Ableitung und ein Funktionswert  $y''(t) = C$  z.B. ihrer zweiten Ableitung.
- Für eine DGL 4. Ordnung wären dann **vier Nebenbedingungen** notwendig und so weiter...

Wir können also festhalten: **Um die Lösung einer DGL  $n$ -ter Ordnung eindeutig festzulegen, sind  $n$  Nebenbedingungen notwendig.**

Meistens wirst du auf sogenannte **Anfangsbedingungen** und **Randbedingungen** stoßen. Das sind auch alles nur Namen für Nebenbedingungen, die darüber aussagen, welche Art von Information du über das System hast.

### 1.6.1 Anfangsbedingungen

Manchmal weist du zum Beispiel, wie das System **zu einem bestimmten Zeitpunkt**  $t = t_0$  war. Das kann der Anfangszeitpunkt sein, zu dem du eine schwingende Masse ausgelenkt und losgelassen hast. In diesem Fall spricht man von **Anfangsbedingungen**. Man legt fest, wie die Auslenkung  $y(t_0)$  zu **einem** bestimmten Zeitpunkt war. Und da wir für die DGL 2. Ordnung zwei Nebenbedingungen brauchen, legst du auch fest, wie die Auslenkung (also die Geschwindigkeit)  $y'(t_0)$  zum Zeitpunkt  $t_0$  war.

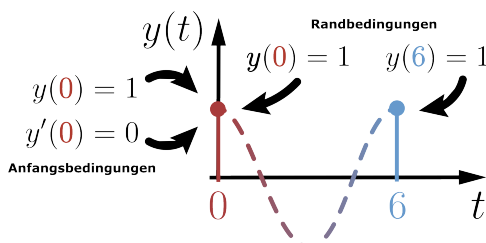
Eine **DGL zusammen mit Anfangsbedingungen** bezeichnen wir als

**Anfangswertproblem.** Lösen wir das Anfangswertproblem, so können wir mit der Lösung das zukünftige Verhalten eines Systems vorhersagen.

## 1.6.2 Randbedingungen

Wir haben also eine DGL 2. Ordnung für die schwingende Masse vor uns. Und nehmen wir mal an, dass wir die Auslenkung  $y(t_0) = y_0$  kennen. Manchmal haben wir Pech und wissen jedoch nicht, **welche Geschwindigkeit** die schwingende Masse zum Anfangszeitpunkt  $t_0$  hatte. Wir kennen also nicht die Ableitung  $y'(t_0)$  zum Zeitpunkt  $t_0$ , zu dem wir die Auslenkung kennen. Wir brauchen aber dringend zwei Nebenbedingungen, sonst ist die Lösung nicht eindeutig und wir können die Funktion  $y(t)$  nicht dazu nutzen, konkrete Zahlen für die Auslenkung  $y$  auszurechnen.

Aber eventuell wissen wir, dass beispielsweise nach  $t = 6$  Sekunden die schwingende Masse im maximal ausgelenkten Zustand war. Wir kennen also die Auslenkung  $y(6) = y_6$ .



Wenn wir die Nebenbedingungen, wie  $y(t_1) = y_1$  und  $y(t_2) = y_2$  kennen, die **zu zwei verschiedenen Zeitpunkten**  $t_1$  und  $t_2$  das System beschreiben, dann sprechen wir von **Randbedingungen**:  $y(t_1) = y_1$  und  $y(t_2) = y_2$ .

Eine **DGL zusammen mit zwei Randbedingungen** bezeichnen wir als **Randwertproblem**. Lösen wir das Randwertproblem, so können wir mit der Lösung vorhersagen, wie sich das System innerhalb dieser Randwerte verhält.

Das mit dem 'Funktionswert an zwei verschiedenen **Zeitpunkten**' war natürlich nur ein Beispiel. Statt der Zeit könnte es eine beliebige Variable sein, die das System, meistens an den Rändern, festlegt. Zu verschiedenen Zeiten,

zu verschiedenen **Orten**, zu verschiedenen **Winkeln** und so weiter.

Nun hast du die wichtigsten Basics zu den Differentialgleichungen kennengelernt. Dieses Wissen wird dir im Studium helfen.

## 2. Tensoren

**Mehr:** [de.fufaev.org/tensoren](http://de.fufaev.org/tensoren)

Bevor wir Tensoren in ihrer allgemeinen Definition richtig verstehen, lernen wir sie zunächst aus einer ingenieurwissenschaftlichen Perspektive kennenlernen. Solange du **Skalare, Vektoren und Matrizen** kennst, wird es dir leicht fallen, Tensoren aus dieser Perspektive zu verstehen, denn Tensoren sind nichts anderes als eine Verallgemeinerung von Skalaren, Vektoren und Matrizen. Genauso wie wir Skalare, Vektoren und Matrizen benutzen, um physikalische Gesetze zu beschreiben, können wir Tensoren benutzen, um die Physik zu beschreiben. Tensoren sind ein noch mächtigeres Werkzeug, mit dem wir Physik beschreiben können, die mit Skalaren, Vektoren und Matrizen allein nicht beschreibbar wäre. Um die moderne Theorie der Gravitation zu entwickeln, musste Albert Einstein zunächst das Konzept der Tensoren verstehen. Erst dann konnte er die allgemeine Relativitätstheorie mathematisch formulieren.

### 2.1 Tensoren nullter und erster Stufe

Fangen wir mit dem einfachsten Tensor an: Der **Tensor nullter Stufe**. Das ist ein Skalar  $\sigma$ , also eine gewöhnliche Zahl. Dieser Tensor hat eine einzige Komponente und repräsentiert beispielsweise die elektrische Leitfähigkeit eines

Drahts. Dieser Tensor nullter Stufe gibt also an, wie gut ein Draht den elektrischen Strom leitet.

Ein etwas komplexerer Tensor, bezeichnen wir ihn mit  $\mathbf{j}$ , ist **Tensor erster Stufe**. Das ist ein Vektor mit drei Komponenten  $j_1$ ,  $j_2$  und  $j_3$  im dreidimensionalen Raum:

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

In Gl. 2.1 haben wir den Tensor erster Stufe **als Spaltenvektor** dargestellt. Natürlich können wir ihn genauso **als Zeilenvektor** darstellen:

$$\mathbf{j} = [j_1, j_2, j_3] \quad (2.2)$$

Zu diesem Zeitpunkt spielt es keine Rolle, wie wir die Komponenten aufschreiben. Aber bedenke, dass es später eine Rolle spielen wird!

Die Notation von Tensoren erster Stufe als Zeilen- oder Spaltenvektor ist nur sinnvoll, wenn wir mit konkreten Zahlen rechnen, wie z.B. in der Computerphysik, wo wir Tensoren benutzen, um konkrete Zahlen zu erhalten. Um damit theoretisch zu rechnen, z.B. um irgendwelche Gleichungen herzuleiten oder einfach eine physikalische Theorie zu formulieren, werden die Tensoren kompakt in Indexnotation formuliert. Diese kennst du sicher schon aus der Vektorrechnung. Anstatt alle drei Komponenten des Tensors erster Stufe auszuschreiben, schreiben wir sie mit einem Index  $k$ , also so  $j_k$ . Wie wir den Index bezeichnen, spielt keine Rolle.  $j_k$  steht stellvertretend für die erste Komponente  $j_1$ , die zweite  $j_2$  oder die dritte  $j_3$ , je nachdem, was wir konkret für den Index  $k$  verwenden. In der theoretischen Physik verwenden wir meistens nichts Konkretes, weil wir die Physik so allgemein und kompakt wie möglich schreiben wollen.

Aus dieser Indexnotation  $j_k$  ist nicht ersichtlich, ob es sich um einen Spalten- oder Zeilenvektor handelt. Das ist nicht gut, denn später ist es wichtig,

zwischen Spalten- und Zeilenvektoren zu unterscheiden. Aber wir können diese Unterscheidung leicht in unsere Indexnotation einführen, indem wir den **Index unten**  $j_k$  notieren, wenn wir einen **Zeilenvektor** meinen. Und wir notieren **Index oben**  $j^k$ , wenn wir einen **Spaltenvektor** meinen. Die Notation der Indizes oben und unten hat eine tiefere Bedeutung, die wir später kennenlernen werden. Vorerst unterscheiden wir nur die Darstellung des Tensors erster Stufe.

## 2.2 Tensoren zweiter Stufe

Der nächst komplexere Tensor ist **Tensor zweiter Stufe**. Wir nennen diesen Tensor auch  $\sigma$ , da ein Tensor zweiter Stufe die elektrische Leitfähigkeit beschreiben kann.

- Die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  als Tensor **nullter** Stufe beschreibt **isotrope** Materialien. Die Leitfähigkeit bleibt gleich, ganz egal in welche Richtung der Strom in diesem Material fließt.
- Die Leitfähigkeit  $\sigma$  als Tensor **zweiter** Stufe beschreibt dagegen ein **nichtisotropes** Material, bei dem die Leitfähigkeit je nach Richtung des Stroms unterschiedlich ist.

Auch den Tensor zweiter Stufe hast du sicherlich schon in der Mathematik in der **Matrixdarstellung** kennengelernt. In einem dreidimensionalen Raum ist der Tensor zweiter Stufe eine 3x3-Matrix:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Auch beim Tensor zweiter Stufe verwenden wir die Indexnotation und notieren die Komponenten der Matrix z.B. mit  $\sigma_{mk}$ . Dabei können die Indizes  $m$  und  $k$  die Werte 1, 2 oder 3 annehmen. Der Index  $m$  gibt die Zeile und der Index  $k$  die Spalte an.

## 2.3 Tensoren höherer Stufen

Wir können das Spiel fortsetzen und einen **Tensor dritter Stufe** betrachten. Dieser hat dann drei Indizes:  $\sigma_{mkn}$ . Der **Tensor vierter Stufe** hat vier Indizes:  $\sigma_{mkni}$ . Und so weiter.

Die Indizes eines Tensors beliebiger Stufe können auch hochgestellt sein. Zum Beispiel können die Indizes  $mk$  des Tensors vierter Stufe oben und die Indizes  $ni$  unten stehen:  $\sigma^{mk}_{ni}$ . Was das genau bedeutet, wird in den folgenden Kapiteln erläutert.

Die **Anzahl der Komponenten**  $d^r$  eines Tensors hängt von der **Raumdimension**  $d$  und von der **Stufe (Rang)**  $r$  des Tensors ab. In einem dreidimensionalen Raum ( $d = 3$ ) hat ein Tensor zweiter Stufe ( $r = 2$ ) demnach  $3^2 = 9$  Komponenten.

## 2.4 Symmetrische und antisymmetrische Tensoren

In der theoretischen Physik, insbesondere in der Relativitätstheorie und Quantenmechanik, werden wir regelmäßig symmetrischen und antisymmetrischen Tensoren begegnen.

Ein **symmetrischer Tensor**  $t_{ij}$  bleibt gleich, wenn wir seine Indizes vertauschen:  $t_{ij} = t_{ji}$ . Konkret bedeutet die Vertauschung der Indizes des Tensors zweiter Stufe als Matrix, dass die Matrix gleich bleibt, wenn wir sie transponieren, also Zeilen und Spalten an der Diagonalen spiegeln:

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Diese Symmetrie-Eigenschaft von Tensoren ist sehr nützlich und Vereinfacht die Berechnungen in der Computerphysik enorm. Außerdem ist diese Eigenschaft entscheidend in der Quantenmechanik, denn symmetrische



Matrizen haben reale Eigenwerte. Sie repräsentieren also physikalische Größen (wir nennen sie Observablen), die wir in einem Experiment messen können. Wenn du also einen symmetrischen Tensor vor dir hast, dann solltest du als theoretischer Physiker sofort einen Dopaminkick bekommen. Das **Kronecker-Delta**  $\delta_{mk}$  ist beispielsweise ein konkretes Beispiel für einen einfachen symmetrischen Tensor.

Wir haben einen Tensor zweiter Stufe betrachtet. Was ist, wenn der Tensor einer höheren Stufe ist? Wie sieht es dann mit seiner Symmetrieeigenschaft aus? Wenn der Tensor beispielsweise vier Indizes hat:  $t_{mkni}$ , und er gleich bleibt, wenn wir die ersten beiden Indizes vertauschen:  $t_{mkni} = t_{kmni}$ , dann sprechen wir von einem **symmetrischen Tensor in den ersten beiden Indizes** oder etwas genauer: **symmetrisch in den  $mk$  Indizes**.

Wir werden aber auch Tensoren antreffen, die antisymmetrisch sind. Ein **antisymmetrischer Tensor**  $t_{ij}$  ändert das Vorzeichen, wenn wir seine Indizes vertauschen:  $t_{ij} = -t_{ji}$ . Wenn der antisymmetrische Tensor als Matrix dargestellt ist, dann ist er gleich seinem negativen Transponierten:

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Die meisten Tensoren sind leider weder symmetrisch noch antisymmetrisch. Aber das Tolle ist: Mathematisch können wir jeden **Tensor  $t$  in einen symmetrischen  $s$  und einen antisymmetrischen  $a$  Anteil zerlegen**:  $t = s + a$ .

Schauen wir uns an, wie wir einen allgemeinen Tensor  $t_{ij}$  zweiter Stufe in die beiden Anteile praktisch zerlegen.

1. Der **symmetrische Anteil**  $s_{ij}$  des Tensors  $t_{ij}$  ist  $s_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji})$ . Hier haben wir die beiden Indizes vertauscht und die beiden Tensoren zusammenaddiert. Der Faktor  $\frac{1}{2}$  ist wichtig, weil wir den Tensor hier doppelt gezählt haben.

2. Der **antisymmetrische Anteil**  $a_{ij}$  des Tensors  $t_{ij}$  ist  $a_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji})$ . Hier haben wir die beiden Indizes vertauscht, dadurch bekommt der vertauschte Tensor ein Minuszeichen. Dann addieren wir die beiden Tensoren zusammen. Auch hier darf der Faktor  $\frac{1}{2}$  nicht fehlen.
3. Anschließend addieren wir den symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zusammen, um den gesamten Tensor zu erhalten:

$$t_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji}) + \frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji}) \quad (2.6)$$

Der erste Term in Gl. 2.6 ist der symmetrische Anteil des Tensors  $t_{ij}$  und der zweite Term ist der antisymmetrische Anteil.

## 2.5 Rechnen mit Tensoren

Mit Tensoren allein können wir wenig anfangen. Wir müssen mit ihnen rechnen können. Dafür gibt es mehrere Rechenoperationen, mit denen wir zwei Tensoren  $a$  und  $b$  zu einem neuen Tensor  $c$  kombinieren können.

### 2.5.1 Addition von Tensoren

Wir können zwei Tensoren  $a_{ij}$  und  $b_{ij}$  gleicher Stufe **addieren**:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (2.7)$$

Das Ergebnis ist ein neuer Tensor  $c_{ij}$  gleicher Stufe. Wenn wir die Tensoren  $a$  und  $b$  als Matrizen repräsentieren, dann ist das Addieren von Tensoren nichts anderes als das komponentenweise Addieren von Matrizen. Die Komponente  $a_{11}$  der Matrix  $a$  in der **ersten Zeile** und **ersten Spalte** wird mit der Komponente  $b_{11}$  der Matrix  $b$  addiert, die ebenfalls in der gleichen Spalte und gleichen Zeile ist. So funktioniert eben die Matrizenaddition. Analog gehen wir mit allen

anderen Komponenten vor. Das Ergebnis ist die Matrix  $c$ :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_a + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}}_b = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}}_c \quad (2.8)$$

## 2.5.2 Subtraktion von Tensoren

Wir können zwei Tensoren  $a_{ij}$  und  $b_{ij}$  gleicher Stufe **subtrahieren**:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (2.9)$$

Das Ergebnis ist ein neuer Tensor  $c_{ij}$  gleicher Stufe. Die Subtraktion funktioniert analog zur Addition. Tausche einfach das Pluszeichen in Gl. 2.9 durch ein Minuszeichen um.

## 2.5.3 Das äußere Produkt von Tensoren (Tensorprodukt)

Die nächste Rechenoperation ist wahrscheinlich neu für dich, nämlich das **äußere Produkt**  $\otimes$ . Manchmal wird es auch kurz **Tensorprodukt** genannt. Hier werden nicht die gleichen Komponenten miteinander verrechnet wie bei Addition und Subtraktion von Tensoren. Für diese Rechenoperation müssen wir also die Indizes des Tensors  $a_{ij}$  und  $b_{km}$  anders bezeichnen. Der Tensor  $b_{km}$  hat daher die Indizes  $k$  und  $m$  bekommen.

$$c_{ijkm} = a_{ij} \otimes b_{km} \quad (2.10)$$

Wenn wir das Tensorprodukt 2.10 von Tensoren zweiter Stufe bilden, dann ist **das Ergebnis  $c_{ijkm}$  ein Tensor vierter Stufe**. Wenn wir dagegen das Tensorprodukt von Tensoren  $a_i$  und  $b_k$  erster Stufe bilden, dann ist das Ergebnis ein Tensor zweiter Stufe:

$$c_{ik} = a_i \otimes b_k = a_i b_k \quad (2.11)$$

So funktioniert das Tensorprodukt mit zwei Tensoren beliebiger Stufe. Die einzige Ausnahme bilden die Tensoren nullter Stufe. In diesem Fall bleibt das Ergebnis ein Tensor nullter Stufe. Üblicherweise wird das Tensorzeichen  $\otimes$  in 2.10 und 2.11 weggelassen.

Machen wir ein konkretes Beispiel für das Tensorprodukt, das wir gut veranschaulichen können, nämlich das Tensorprodukt von Tensoren erster Stufe wie in Gl. 2.11. Sie werden durch die Vektoren repräsentiert:  $a = [a_1, a_2, a_3]$  und  $b = [b_1, b_2, b_3]$ . Das Ergebnis ist ein Tensor zweiter Stufe, der durch eine Matrix repräsentiert wird:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}}_c \quad (2.12)$$

Der erste Index, der Index  $i$  nummeriert definitionsgemäß die Zeilen der Matrix und der zweite Index, der Index  $k$ , nummeriert die Spalten.

Das Tensorprodukt muss nicht unbedingt zwischen zwei Tensoren gleicher Stufe sein. Wir können auch beispielsweise das Tensorprodukt mit dem Tensor dritter Stufe  $A_{ijm}$  und zweiter Stufe  $B_{kn}$  bilden. Das Ergebnis ist ein Tensor fünfter Stufe  $C_{ijmkn}$ :

$$C_{ijmkn} = A_{ijm} B_{kn} \quad (2.13)$$

Wie du wahrscheinlich schon gemerkt hast, stellt beispielsweise  $B_{kn}$  konkret die  $kn$ -te Komponente des Tensors  $B$  dar. Und  $A_{ijm}$  ist die  $ijm$ -te Komponente des Tensors  $A$ . Bilden wir das Tensorprodukt wie in 2.13, dann ist das das Tensorprodukt der Komponenten. Das Ergebnis ist die  $ijmkn$ -te Komponente des Tensors  $C$ . Wenn wir einen Tensor mit Indizes notieren, dann meinen wir damit stets seine Komponenten. Wir sagen trotzdem salopp »Tensor« zu seiner Komponentenschreibweise.

Das Tensorprodukt funktioniert natürlich genauso mit hochgestellten Indizes,

die wir in dem nächsten Kapitel kennenlernen werden. Wenn bei dem Tensor  $A$  die Indizes  $ij$  oben stehen, dann müssen sie auch bei dem Ergebnistensor  $C$  oben stehen:

$$C^{ij}_{mkn} = A^{ij}_m B_{kn} \quad (2.14)$$

## 2.5.4 Kontraktion (Verjüngung) von Tensoren

Die nächste Rechenoperation, die wir durchführen können, ist die **Kontraktion eines Tensors** (manchmal auch **Verjüngung** genannt). Dazu betrachten wir als Beispiel den Tensor vierter Stufe:  $t_{ijmk}$ . Die Kontraktion dieses Tensors bedeutet Folgendes:

1. Wir wählen zwei seiner Indizes. Zum Beispiel den Index  $i$  und  $m$ :  $t_{ijmk}$ .
2. Dann setzen wir die beiden Indizes gleich:  $i = m$ . Wir können sie beispielsweise beide  $i$  nennen:  $t_{ijik}$ .
3. Anschließend summieren wir über den Index  $i$ :

$$\sum_{i=1}^{\square} t_{ijik}$$

Im dreidimensionalen Raum geht der Index  $i$  von 1 bis 3, daher ergibt die Kontraktion des Tensors  $t_{ijmk}$  die folgende Summe:

$$\sum_{i=1}^{\square} t_{ijik} = t_{1j1k} + t_{2j2k} + t_{3j3k}$$

Wenn wir diese drei Schritte einem anderen Physiker kommunizieren wollen, dann sagen wir: Kontraktion der Indizes  $i$  und  $m$  des Tensors  $t_{ijmk}$ . Oder: **Kontraktion des ersten und dritten Index des Tensors  $t_{ijmk}$ .**

Die Kontraktion ist sehr nützlich, weil sie die **Ordnung eines Tensors reduziert**. So hat die Kontraktion des Tensors  $t_{ijmk}$  vierter Stufe seine Ordnung um zwei reduziert. Das Ergebnis der Kontraktion ist ein Tensor zweiter Stufe:  $t_{ijik} = c_{jk}$ .

In der Physik nutzen wir die **Einstein-Summenkonvention**, die besagt, dass wir zur Vereinfachung der Notation das Summenzeichen in  $\sum_{i=1} t_{ijk}$  weglassen können, wenn in einem Tensor zwei gleiche Indizes auftauchen. Beim Tensor  $t_{ijk}$  in Kombination mit der Einstein-Summenkonvention wird also über den Index  $i$  summiert:

$$t_{ijk} = t_{1j1k} + t_{2j2k} + t_{3j3k} \quad (2.15)$$

Wenn wir einen Tensor zweiter Stufe kontrahieren  $t_{ii}$  dann wird die Kontraktion auch **Spur des Tensors** genannt:

$$t_{ii} = t_{11} + t_{22} + t_{33} = \text{Tr}(t) \quad (2.16)$$

Das Ergebnis ist ein Tensor nullter Stufe, also ein Skalar.

Wir können natürlich auch die Indizes zweier unterschiedlicher Tensoren kontrahieren. Nehmen wir beispielsweise einen Tensor  $M_{ij}$  und einen Tensor  $v_k$ . Das Tensorprodukt  $M_{ij}v_k$  ohne Kontraktion ergibt einen Tensor dritter Stufe. Nun kontrahieren wir die Indizes  $j$  und  $k$ . Dann entspricht das in der Matrix- und Vektordarstellung genau der **Multiplikation einer Matrix  $M$  mit einem Vektor  $v$** . Das Ergebnis  $u_i$  ist ein Tensor erster Stufe, also ein Vektor:

$$\underbrace{M_{ij}}_M \underbrace{v_j}_v = \underbrace{u_i}_u \quad (2.17)$$

## 2.6 Kronecker-Delta

**Mehr:** [de.fufaev.org/kronecker-delta](http://de.fufaev.org/kronecker-delta)

Das Kronecker-Delta  $\delta_{ij}$  ist in der theoretischen Physik nicht mehr wegzudenken. Du wirst diesem relativ einfachen, dennoch mächtigen Tensor praktisch in allen Teilgebieten der theoretischen Physik begegnen. Es wird beispielsweise eingesetzt, um lange Ausdrücke kompakter zu notieren und komplizierte Ausdrücke zu vereinfachen. In Kombination mit dem

Levi-Civita-Symbol, das du im nächsten Kapitel lernst, sind die beiden Tensoren sehr nützlich!

Kronecker-Delta  $\delta_{ij}$  ist ein kleines griechisches Delta, das entweder 1 oder 0 ist, je nach dem, welchen Wert die beiden Indizes  $i$  und  $j$  haben. Kronecker-Delta ist gleich 1, wenn  $i$  und  $j$  gleich sind. Und das **Kronecker-Delta ist gleich 0, wenn  $i$  und  $j$  ungleich sind:**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.18)$$

Machen wir ein paar Beispiele:

- $\delta_{11} = 1$ , da beide Indizes gleich sind.
- $\delta_{23} = 0$ , da beide Indizes unterschiedlich sind.
- $a\delta_{33} = a \cdot 1 = a$
- $\delta_{23}\delta_{22} = 0$

Beachte außerdem, dass wir sofern nicht anders gesagt, die zuvor kennengelernte Einstein-Summenkonvention verwenden. Über den gleichen Index wird summiert:

$$\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{i1}\delta_{1k} + \delta_{i2}\delta_{2k} + \delta_{i3}\delta_{3k} \quad (2.19)$$

Es gibt jedoch Ausnahmen für die Einstein-Summenkonvention. Zum Beispiel beim Differentialoperator  $\partial_i$ . Du darfst nicht  $\partial_i$  vor  $f_i$  ziehen, wenn  $\partial_i$  als Ableitung auf  $f_i$  wirkt:

$$\partial_i f_i \neq f_i \partial_i$$

Du darfst **nicht einfach etwas vor die Ableitung ziehen, was abgeleitet werden soll!** Pass also bei Operatoren in Indexnotation auf!

Lass uns vier nützliche Rechenregeln mit Kronecker-Delta anschauen, die du immer dann einsetzen kannst, wenn über doppelte Indizes summiert wird.

### 2.6.1 Kronecker-Delta ist symmetrisch

Indizes, hier  $i$  und  $j$ , dürfen vertauscht werden:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (2.20)$$

### 2.6.2 Mit Kronecker-Delta kontrahieren

Enthält das Produkt zweier oder mehrerer Kronecker-Deltas einen Summationsindex, hier  $j$ , dann lässt sich das **Produkt zusammenfassen**, wobei der Summationsindex  $j$  verschwindet:

$$\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik} \quad (2.21)$$

Ein Beispiel mit zwei Summationsindizes:

$$\delta_{ij} \delta_{kj} \delta_{in} = \delta_{kn} \quad (2.22)$$

Das sollte verdeutlichen, dass die **Reihenfolge der Kontraktion** des Kronecker-Delta irrelevant ist.

Wir können diese Regel auch auf die Kontraktion des Kronecker-Deltas mit einem anderen Tensor, hier  $a_i$ , anwenden:

$$a_i \delta_{ij} = a_j \quad (2.23)$$

Anderes Beispiel:  $\Gamma_{jmk} \delta_{nk} = \Gamma_{jmn}$ .

### 2.6.3 Kronecker-Delta summieren

Wenn  $i$  die Werte von 1 bis  $n$  annimmt, dann gilt:

$$\delta_{ii} = \underbrace{\delta_{11} + \delta_{22} + \dots}_n = n \quad (2.24)$$

In der vierdimensionalen Raumzeit:  $\delta_{ii} = 4$ .



### 2.6.4 Skalarprodukt in Indexnotation

Wie nützlich das Kronecker-Delta in der theoretischen Physik ist, können wir uns ganz einfach am Skalarprodukt veranschaulichen. Betrachten wir irgendeinen dreidimensionalen Vektor:

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3] \quad (2.25)$$

$$= a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (2.26)$$

$$= a_i \hat{\mathbf{e}}_i \quad (2.27)$$

Hierbei sind  $\hat{\mathbf{e}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2$  und  $\hat{\mathbf{e}}_3$  drei **Basisvektoren**, die normiert und orthogonal zueinander sind. In diesem Fall spannen sie ein orthogonales dreidimensionales Koordinatensystem auf. Beim dritten Gleichheitszeichen haben wir die Einstein-Summenkonvention benutzt und den Vektor  $\mathbf{a}$  in Indexnotation  $a_i \hat{\mathbf{e}}_i$  dargestellt.

Nehmen wir nun einen weiteren Vektor  $\mathbf{b}$  und stellen ihn ebenfalls in Indexnotation dar:  $b_j \hat{\mathbf{e}}_j$ . Beachte, dass wir die Indizes der beiden Vektoren anders nennen müssen.

Nun bilden wir das Skalarprodukt der beiden Vektoren:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i \hat{\mathbf{e}}_i) \cdot (b_j \hat{\mathbf{e}}_j) \quad (2.28)$$

Wie dürfen die Objekte in Indexnotation in Gl. 2.28, wie wir möchten sortieren. Das nutzen wir mal aus und setzen Klammern um die Basisvektoren herum, um ihre Wichtigkeit bei der Einführung des Kronecker-Deltas zu betonen:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j) \quad (2.29)$$

Damit haben wir das Skalarprodukt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  der beiden Vektoren auf das Skalarprodukt der Basisvektoren  $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$  zurückgeführt. Die Basisvektoren sind orthonormal (also paarweise orthogonal und normiert). Erinnerung wir uns mal daran, was die Eigenschaft orthonormiert zu sein, für zwei Vektoren bedeutet:

- Skalarprodukt  $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$  ergibt 1, wenn  $i$  und  $j$  **gleich** sind. In diesem Fall handelt es sich um denselben Vektor.

- Skalarprodukt  $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$  ergibt 0, wenn  $i$  und  $j$  **ungleich** sind. In diesem Fall sind es zwei verschiedene Basisvektoren und sie liegen orthogonal zueinander.

Die beiden Verhaltensweisen lassen sich mathematisch folgendermaßen kompakt schreiben:

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.30)$$

Kommt dir diese Eigenschaft nicht bekannt vor? Das Skalarprodukt 2.30 von zwei orthonormierten Vektoren verhält sich genau wie die Definition 2.18 von Kronecker-Delta! Deshalb darfst du das Skalarprodukt zwischen zwei Basisvektoren mit dem Kronecker-Delta ersetzen:

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \quad (2.31)$$

Damit können wir das **Skalarprodukt** 2.29 **mittels Kronecker-Delta schreiben**:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j \delta_{ij} \quad (2.32)$$

Wenn du dich an die Rechenregeln für die Kontraktion erinnerst, können wir in 2.32 einen der der Summationsindizes  $i$  oder  $j$  kontrahieren. Lass uns zum Beispiel das  $j$  kontrahieren (eliminieren). Wir bekommen das **Skalarprodukt in Indexnotation**:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i \quad (2.33)$$

Und Gl. 2.33 ist genau die Definition des Skalarprodukts, bei dem die Vektorkomponenten komponentenweise summiert werden.

Nun weißt du, wie das Skalarprodukt in Indexnotation geschrieben wird und welche Rolle dabei das Kronecker-Delta spielt. Es repräsentiert das Skalarprodukt der Basisvektoren:  $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$ .

### Beispiel: Kronecker-Delta in der Quantenmechanik

Der Spin-up-Zustand  $|1\rangle$  und der Spin-down-Zustand  $|2\rangle$  sind orthonormal zueinander. Beim Wort »orthonormal« sollten bei dir der Gedanke aufkommen: Kronecker-Delta kann hier eingesetzt werden! Warum nochmal? Orthonormale Vektoren ergeben entweder 1 oder 0, genau wie das Kronecker-Delta.

Das Skalarprodukt  $|i\rangle \cdot |j\rangle$  in der Quantenmechanik wird in Bra-Ket-Notation  $\langle i | j \rangle$  dargestellt (diese Notation lernen wir im Kapitel 16):

$$|i\rangle \cdot |j\rangle = \langle i | j \rangle = \delta_{ij} \quad (2.34)$$

Hierbei nehmen  $i$  und  $j$  die Werte 1 (spin up) oder 2 (spin-down) an.

**Du kannst dir Folgendes merken:** Sobald du in Indexnotation einer Gleichung einen Ausdruck entdeckst, der je nach Indizes entweder 0 oder 1 ergibt, dann ersetze es mit Kronecker-Delta und nutze die obigen Kronecker-Delta-Rechenregeln, um die Gleichungen weiter zu vereinfachen oder in Indexnotation darzustellen.

## 2.7 Levi-Civita-Symbol

**Mehr:** [de.fufaev.org/levi-civita-symbol](http://de.fufaev.org/levi-civita-symbol)

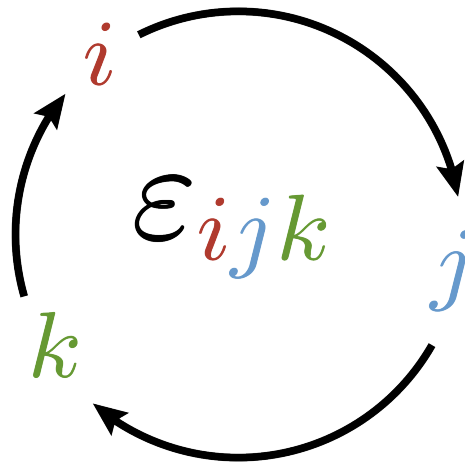
Neben dem Kronecker-Delta  $\delta_{ij}$  ist das Levi-Civita-Symbol  $\varepsilon_{ijk}$  ein sehr häufig auftretendes Symbol in der theoretischen Physik und zwar in allen Teilgebieten der Physik, angefangen bei der klassischen Mechanik bis hin zur Quantenfeldtheorie.

Mit dem Levi-Civita-Symbol, der manchmal auch Epsilon-Tensor genannt wird, kannst du beispielsweise komplizierte Vektorgleichungen, wie mehrfach auftretende Kreuzprodukte, leicht umformen und vereinfachen und Gleichungen kompakter darstellen.

Levi-Civita-Symbol  $\varepsilon_{ijk}$  wird mit einem kleinen griechischen Epsilon notiert, der drei Indizes  $i$ ,  $j$  und  $k$  trägt. Das Levi-Civita-Symbol kann drei verschiedene

Werte annehmen:  $+1$ ,  $0$  oder  $-1$ . Wann nimmt es welchen Wert an? Das hängt davon ab, wie die Indizes  $ijk$ , in Bezug auf die ursprüngliche Reihenfolge, angeordnet sind. Wie meine ich das genau? Schauen wir uns das etwas genauer an. Du kannst die Indizes  $ijk$  untereinander permutieren (vertauschen). Wir können die Indizes auf zwei Arten permutieren.

Bei der **geraden (zyklischen) Permutation** werden alle Indizes  $ijk$  im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Bei dieser Permutation wechseln alle Indizes ihre Position.



Zum Beispiel:

- Eine gerade Permutation von  $ijk$  im Uhrzeigersinn ergibt  $kij$ . Siehst du, wie hier die Indizes rotiert wurden?
- Eine gerade Permutation von  $kij$  im Uhrzeigersinn ergibt  $jki$ .
- Eine gerade Permutation von  $jki$  würde wieder  $ijk$  ergeben. Denk dran, dass auch eine Drehung der Indizes gegen den Uhrzeigersinn eine gerade Permutation ist.

Bei einer **ungeraden Permutation** werden zwei Indizes untereinander vertauscht. Bei dieser Permutation wechseln nur zwei der drei Indizes  $ijk$  ihre Position. Zum Beispiel:

- Eine ungerade Vertauschung von  $ijk$  ist  $jik$ . Hier wurden  $i$  und  $j$  miteinander vertauscht, während  $k$  an der gleichen Stelle geblieben ist.
- Eine weitere ungerade Permutation von  $ijk$  ist  $kji$ . Hier wurden  $i$  und  $k$  vertauscht, während  $j$  an der gleichen Stelle geblieben ist.
- Und die letzte mögliche ungerade Permutation von  $ijk$  ist  $ikj$ . Hier wurde  $i$  stehen gelassen, während  $j$  und  $k$  miteinander vertauscht wurden.

Mit diesem Wissen bist du in der Lage die Definition des Levi-Civita-Symbols zu verstehen. Die Permutationen beziehen sich auf eine Startposition der Indizes. Hier nehmen wir  $(ijk) = (123)$  als Startposition an. Dann **verhält sich das Levi-Civita-Symbol** folgendermaßen:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) \text{ ist gerade Permutation von } (123) \\ -1 & (ijk) \text{ ist ungerade Permutation von } (123) \\ 0 & \text{min. zwei Indizes sind gleich} \end{cases} \quad (2.35)$$

Hier ein paar Beispiele:

- $\varepsilon_{112} = 0$ , da die ersten beiden Indizes gleich sind.
- $\varepsilon_{313} = 0$ , da der erste und dritte Index gleich ist.
- $\varepsilon_{222} = 0$ , da alle drei Indizes gleich sind.
- $\varepsilon_{123} + \varepsilon_{213} = 1 + (-1) = 0$ , da beim ersten Epsilon die Indizes in der Startposition sind und die Indizes des zweiten Epsilon eine ungerade Permutation davon sind.
- $\varepsilon_{123} \varepsilon_{231} = 1 \cdot 1 = 1$ , da beim ersten Epsilon die Indizes in der Startposition sind und die Indizes des zweiten Epsilon gegen den Uhrzeigersinn gerade permutiert wurden.

### 2.7.1 Kreuzprodukt in Indexnotation

Die enorme Nützlichkeit des Levi-Civita-Symbols lässt sich anhand des **doppelten Kreuzprodukts**  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$  oder des **Spatprodukts**  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  begreifen. Aber selbst für das einfache Kreuzprodukt  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  zweier Vektoren  $\mathbf{a}$

und  $\mathbf{b}$ , brauchen wir das Levi-Civita-Symbol, um das Kreuzprodukt kompakt in Indexnotation darstellen zu können.

Das Kreuzprodukt, geschrieben mittels der orthonormalen Basisvektoren  $\hat{\mathbf{e}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2$  und  $\hat{\mathbf{e}}_3$  sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} & (2.36) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{\mathbf{e}}_1 \\ &+ (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{\mathbf{e}}_2 \\ &+ (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{\mathbf{e}}_3 \end{aligned}$$

Die  $i$ -te Komponente  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i$  des Kreuzprodukts  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , dargestellt in der orthonormalen Basis, können wir in Indexnotation folgendermaßen kompakt schreiben:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i a_j b_k \quad (2.37)$$

Schau dir mal die Indizes in Gl. 2.37 genau an. Alle drei Indizes  $i$ ,  $j$  und  $k$  kommen **doppelt** vor. Hier haben wir die Einstein-Summenkonvention benutzt, daher wird **über doppelt auftretende Indizes summiert**. Wenn wir konkrete Werte für die Indizes in 2.37 einsetzen, bekommen wir genau die erste ( $i = 1$ ), zweite ( $i = 2$ ) oder dritte ( $i = 3$ ) Komponente des Kreuzprodukts heraus. Doch Gl. 2.37 ist nicht nur eine kompakte Notation des Kreuzprodukts, es ist auch eine raffinierte Notation für das Kreuzprodukt, mit der wir die Rechenregeln für das Spatprodukt und das doppelte Kreuzprodukt leicht herleiten können.

Schreibe zum Spaß das doppelte Kreuzprodukt  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  mit Vektorschreibweise aus und dann schreib es in Indexnotation aus. Und beweise mit der einen und der anderen Notation die folgende **BAC-CAB-Regel**:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (2.38)$$

---

Du wirst dankbar sein, das Levi-Civita-Symbol kennengelernt zu haben, denn du wirst es im Grundstudium und im Masterstudium regelmäßig antreffen.





## 3. Dirac-Delta

Mehr: [de.fufaev.org/dirac-delta](https://de.fufaev.org/dirac-delta)

Das Dirac-Delta  $\delta(x)$  (manchmal auch Dirac-Funktion genannt, obwohl es keine Funktion ist) ist ein nützliches mathematisches Objekt, das in vielen Bereichen der theoretischen Physik Anwendung findet. Angefangen in der Elektrodynamik bei der **Beschreibung von elektrischen Punktladungen** als eine in einem einzigen Punkt konzentrierte Ladungsdichte, bis hin zur Quantenfeldtheorie bei der **Beschreibung von Quantenfeldern** als Operatoren.

Betrachten wir eine eindimensionale elektrische Ladungsdichte  $\rho(x)$ , die von der Position  $x$  abhängt. Die Ladungsdichte ist also auf einer Linie verschmiert.  $\rho(x)$  kann genauso eine Massendichte oder irgendeine andere **Dichtefunktion** repräsentieren. Wir schauen hier als Beispiel die Ladungsdichte an.

Um zu berechnen, wie groß die **Gesamtladung**  $Q$  auf dieser Linie ist, müssen wir die Ladungsdichte  $\rho(x)$  auf dieser Linie integrieren (aufsummieren). Nehmen wir an, dass die Ladungsdichte von  $x = a$  bis  $x = b$  verschmiert ist. Das sind unsere Integrationsgrenzen. Die Gesamtladung berechnet sich also folgendermaßen:

$$\int_a^b \rho(x) dx = Q \tag{3.1}$$

Doch was ist, wenn  $Q$  keine verschmierte Ladung, sondern eine sich an einem einzigen Punkt lokalisierte Ladung ist? Was ist, wenn  $Q$  eine Singularität ist? Die gesamte Ladungsdichte  $\rho(x)$  ist dann in einem einzigen Punkt konzentriert und sonst überall Null. Und hier tritt das Problem ein: Wir können das Integral 3.1 mathematisch nicht für Singularitäten verwenden. Aber wir müssen irgendwie eine elektrische Punktladung mathematisch beschreiben können.

Die Ladungsdichte  $\rho(x)$  muss zwei Eigenschaften erfüllen, wenn sie eine einzige Punktladung beschreiben soll:

- Ladungsdichte  $\rho(x)$  muss an jedem Ort  $x$  verschwinden, außer am Ort, wo sich die Punktladung befindet. Nehmen wir an, die Ladung befindet sich im Koordinatenursprung  $x = 0$ , also:  $\rho(x) = 0$  für  $x \neq 0$ .
- Das Integral 3.1 über die Ladungsdichte muss uns den Wert  $Q$  liefern, wenn die Punktladung innerhalb der Integrationsgrenzen  $x = a$  und  $x = b$  liegt.

Wenn wir die **Ladung auf den Wert  $Q = 1$  normieren** und die **beiden Eigenschaften der Ladungsdichte einer Punktladung beachten**, dann notieren wir die Dichte mit einem griechischen Delta  $\delta(x)$  und nennen sie das **Dirac-Delta**. Das Dirac-Delta beschreibt also eine Dichte und hat folgende Eigenschaften, die wir uns gewählt haben, damit wir damit eine Punktladung ( $Q = 1$ ) beschreiben können:

- Das Dirac-Delta ist überall Null, außer im Koordinatenursprung:

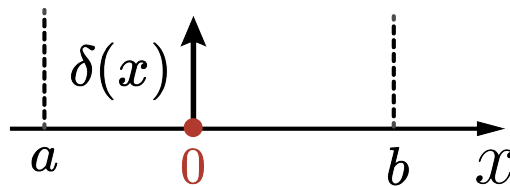
$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0 \tag{3.2}$$

- Wenn die Integration des Dirac-Delta den Koordinatenursprung  $x = 0$  einschließt, dann ergibt das Integral den Wert 1:

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1, \quad a < 0 < b \tag{3.3}$$

Auch wenn der Name »Delta-Funktion« suggerieren mag, dass es sich um eine Funktion handelt, ist  $\delta(x)$  mathematisch gesehen keine Funktion, sondern ein anderes mathematisches Objekt, das beispielsweise als eine sogenannte Dirac-Distribution oder als ein Dirac-Maß aufgefasst werden kann. Lass uns  $\delta(x)$  daher weiter als Dirac-Delta bezeichnen, um die Mathematiker auf uns nicht aufzuhetzen.

Das Dirac-Delta wird graphisch mit einem Pfeil veranschaulicht, der sich an der Position  $x = 0$  der Einheitspunktladung  $Q = 1$  befindet. Die Höhe des Pfeils wird meistens so gewählt, dass sie den Wert des Integrals repräsentiert, in diesem Fall also  $Q = 1$ .



### 3.1 Dirac-Delta im Koordinatenursprung

Betrachten wir jetzt ein Integral der Delta-Funktion zusammen mit irgendeiner Funktion  $f(x)$ :

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = ? \quad (3.4)$$

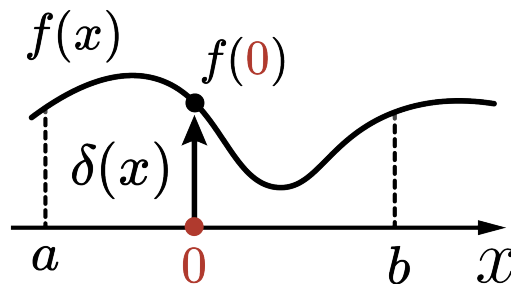
Solch ein Integral ist sehr einfach zu berechnen, denn wegen der Eigenschaft 3.3 ist das Dirac-Delta überall Null, außer an der Stelle  $x = 0$ . Damit ist auch das Produkt  $f(x)\delta(x)$  überall Null, außer an der Stelle  $x = 0$ . Im Integral 3.4 bleibt also nur der Funktionswert  $f(0)$  erhalten. Da  $f(0)$  nicht mehr von  $x$  abhängt,

können wir diese Konstante vor das Integral ziehen:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\delta(x) dx &= \int_a^b f(0)\delta(x) dx & (3.5) \\ &= f(0) \int_a^b \delta(x) dx \\ &= ? \end{aligned}$$

Das Integral über das Dirac-Delta in ?? ergibt 1, wenn  $x = 0$  zwischen  $a$  und  $b$  liegt (ansonsten ist das Integral Null). Das ist genau die Eigenschaft des Dirac-Delta. Wir wissen also, was das Dirac-Delta im Integral ?? macht, wenn sie mit einer Funktion  $f(x)$  multipliziert wird. Das **Dirac-Delta pickt den Wert der Funktion im Koordinatenursprung  $x = 0$** :

$$\int_a^b f(x)\delta(x) dx = f(0) \quad (3.6)$$

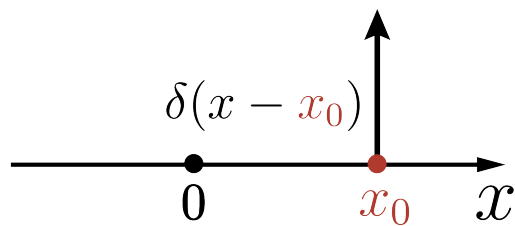


## 3.2 Verschobenes Dirac-Delta

Wir können die Ladung  $Q = 1$  natürlich auch an eine andere Stelle auf der  $x$ -Achse verschieben, zum Beispiel an die Stelle  $x = x_0$ . Um die außerhalb des Koordinatenursprungs verschobene Ladung anzudeuten, schreiben wir das Argument des Dirac-Delta als  $\delta(x - x_0)$ . Warum nicht  $\delta(x + x_0)$ ? Weil wir das Dirac-Delta in die positive Richtung verschoben haben. Dann muss die Delta-Funktion überall Null sein, außer an der Stelle  $x_0$ . Das Argument gilt genauso, wenn du irgendeine Funktion verschiebst.

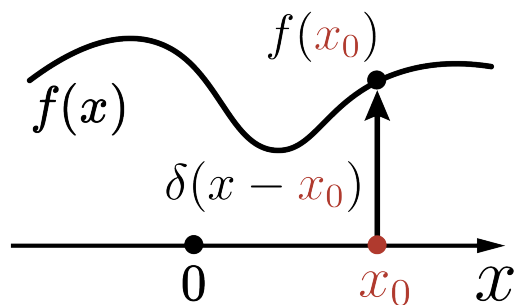
Auch bei einer verschobenen Ladung ist das Integral über die Delta-Funktion gleich 1, wenn die Ladung bei  $x = x_0$  zwischen den Integrationsgrenzen liegt. Wir haben ja das Dirac-Delta nur nach  $x_0$  verschoben, daher ist der Wert des Integrals mit  $\delta(x - x_0)$  genauso wie im Fall von  $\delta(x)$ :

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = 1, \quad a < x_0 < b \quad (3.7)$$



Was ist nun, wenn das verschobene Dirac-Delta mit einer anderen Funktion  $f(x)$  im Integral multipliziert wird?  $\delta(x - x_0)$  ist überall Null, außer an der Stelle  $x_0$ . Das heißt: **Verschobenes Dirac-Delta  $\delta(x - x_0)$  im Integral pickt den Funktionswert  $f(x_0)$  an der Stelle, wo sich das Dirac-Delta befindet:**

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \quad a < x_0 < b \quad (3.8)$$



### 3.3 Eigenschaften des Dirac-Delta

Das Dirac-Delta hat zwei wichtige Eigenschaften, die wir in der theoretischen Physik beim Hantieren mit Gleichungen brauchen werden:

- Das Dirac-Delta ist **symmetrisch**:

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (3.9)$$

- Der **Faktor**  $k$  im Argument von Dirac-Delta **lässt sich herausziehen**:

$$\delta(kx) = \frac{1}{k} \delta(x) \quad (3.10)$$

### 3.4 Analogie zum Kronecker-Delta

Die definierenden Eigenschaften 3.2 und 3.3 des Dirac-Delta  $\delta(x - x_0)$  erinnern ein bisschen an die Definition von Kronecker-Delta  $\delta_{ij}$ , wenn wir die Buchstaben gleich nennen:  $x := i$  und  $x_0 := j$ . Das Dirac-Delta sieht dann so aus:  $\delta(i - j)$ .

Erinnere dich, was das Kronecker-Delta (mit Einstein-Summenkonvention) in einer Summe  $f_i \delta_{ij}$  mit einer Vektorkomponente  $f_i$  bewirkt. Es wählt die  $j$ -te Vektorkomponente des Vektors  $\mathbf{f}$  aus (wir haben den Vektor  $\mathbf{f}$  benannt, um die Analogie besser zu verdeutlichen):

$$f_i \delta_{ij} = f_j \quad (3.11)$$

Und jetzt vergleiche das mit dem, was das Dirac-Delta im Integral tut:

$$\int_a^b f(i) \delta(i - j) = f(j) \quad (3.12)$$

Während wir mit dem Kronecker-Delta  $\delta_{ij}$  eine Vektorkomponente  $f_j$  aus endlich vielen Vektorkomponenten  $f_i$  herauspicken können, picken wir mit dem Dirac-Delta  $\delta(i - j)$  einen Funktionswert  $f(j)$  aus unendlich vielen Funktionswerten  $f(i)$ .

- Das Kronecker-Delta  $\delta_{ij}$  kommt zum Einsatz, wenn wir mit Vektoren  $\mathbf{f}$  und ihren endlich vielen Vektorkomponenten  $f_i$  herumhantieren.
- Die Deltafunktion  $\delta(i - j)$  kommt zum Einsatz, wenn wir mit Funktionen  $f$  und ihren unendlich vielen Funktionswerten  $f(i)$  herumhantieren.

## 3.5 Dreidimensionales Dirac-Delta

Wir haben bis jetzt nur ein eindimensionales Dirac-Delta  $\delta(x)$  betrachtet, das entlang der x-Achse hin und her verschoben werden kann. Die Ladungen oder andere Dichtesingularitäten wie schwarze Löcher befinden sich üblicherweise in einem dreidimensionalen Raum mit drei Raumachsen:  $(x, y, z)$ . Die Verallgemeinerung des Dirac-Delta auf den dreidimensionalen Raum ist zum Glück ganz einfach.

$$\delta(x) \delta(y) \delta(z) = 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \quad (3.13)$$

Wenn unsere Einheitsladung  $Q = 1$  im Koordinatenursprung  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  sitzt, dann können wir die dazugehörige Dichte, also das dreidimensionale Dirac-Delta, mit dem Produkt von drei eindimensionalen Dirac-Deltas  $\delta(x)$ ,  $\delta(y)$  und  $\delta(z)$  beschreiben:

$$\int_V \delta(x) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = 1, \quad (0, 0, 0) \in V \quad (3.14)$$

Um nicht drei Dirac-Delta's schreiben zu müssen, fassen wir sie zu einem Dirac-Delta mit einer Hochzahl, die die Raumdimension angibt. Und im Argument des Dirac-Delta schreiben wir den fettgedruckten Ortsvektor  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  hin:

$$\delta^3(\mathbf{r}) := \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (3.15)$$

Das zum Ort  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  verschobene Dirac-Delta sieht dann folgendermaßen aus:

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) := \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (3.16)$$

Wenn die dreidimensionale Delta-Funktion im Integral in einem Produkt mit einer skalaren dreidimensionalen Funktion  $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$  auftaucht, dann funktioniert das dreidimensionale Dirac-Delta  $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  analog wie im eindimensionalen Fall. Das **Dirac-Delta pickt den Wert  $f(\mathbf{r}_0) = f(x_0, y_0, z_0)$  der Funktion an der Stelle  $\mathbf{r}_0$ :**

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = f(\mathbf{r}_0) \quad (3.17)$$

Mit dem Wissen über das Dirac-Delta können wir Dichtesingularitäten (z.B. Punktladungen und schwarze Löcher) theoretisch beschreiben.



## 4. Vektorfelder

**Mehr:** [de.fufaev.org/vektorfeld](http://de.fufaev.org/vektorfeld)

Eine Vektorfunktion  $\mathbf{F}$  (oder vektorwertige Funktion) ist ein Vektor, der von den (kartesischen) Koordinaten  $(x, y, z)$  abhängt und im dreidimensionalen Raum drei Komponenten hat:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

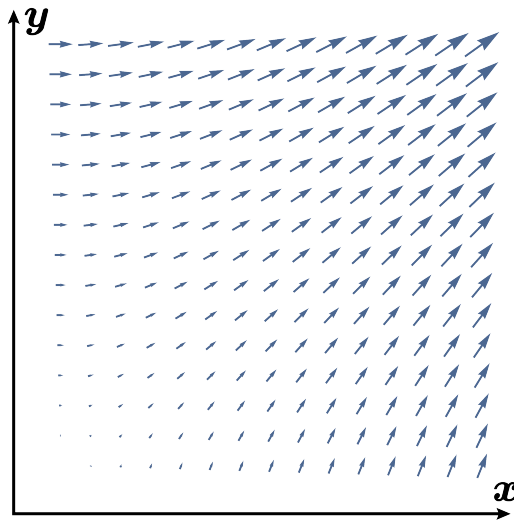
Hierbei sind  $F_x(x, y, z)$ ,  $F_y(x, y, z)$  und  $F_z(x, y, z)$  drei Skalarfunktionen und sie stellen die drei Komponenten der Vektorfunktion  $\mathbf{F}$  dar. Manchmal schreiben wir auch kurz:  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$ , wobei  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  der Ortsvektor ist.

In der theoretischen Physik werden wir hauptsächlich mit Vektorfeldern arbeiten. Eine Vektorfunktion kann von beliebigen Koordinaten  $(x, y, z)$  abhängen, wie beispielsweise Winkel. Und, wenn wir von einem Vektorfeld sprechen, dann repräsentieren  $(x, y, z)$  die Raumkoordinaten. Vektorfunktionen und Vektorfelder stellen wir entweder mit einem Pfeil  $\vec{F}$  über dem Symbol oder etwas kompakter, in fett  $\mathbf{F}$  dar. Das Vektorfeld könnte beispielsweise das elektrische Feld  $\mathbf{F} = \mathbf{E}$  oder ein magnetisches Feld  $\mathbf{F} = \mathbf{B}$  repräsentieren.

■ **Beispiel 4.1** Ein zweidimensionales Vektorfeld könnte konkret so aussehen:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x + 5y \\ 5x \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Hierbei ist  $F_x(x, y) = 2x + 5y$  die erste Komponente und  $F_y(x) = 5x$  die zweite Komponente des Vektorfeldes. Die zweite Komponente hängt nur von der Ortskoordinate  $x$  ab. Wenn wir 4.2 graphisch darstellen, dann sieht das Vektorfeld folgendermaßen aus:



Jedem Ort  $(x, y)$  wird ein Vektor  $\mathbf{F}(x, y)$  zugeordnet. Zum Beispiel am Ort  $(x, y) = (1, 1)$  sieht der Vektor folgendermaßen aus:  $\mathbf{F}(1, 1) = (7, 5)$ . Setze einfach  $x = 1$  und für  $y = 1$  in das Vektorfeld 4.2 ein, um diesen Beispielvektor zu bekommen. Wenn du auf diese Weise ganz viele Orte einsetzt, bekommst du die graphische Darstellung des Vektorfeldes 4.2. ■

# 5. Nabla-Operator

**Mehr:** [de.fufaev.org/nabla-operator](http://de.fufaev.org/nabla-operator)

Dem **Nabla-Operator**  $\nabla$  (umgedrehtes großes Delta) werden wir in jedem Teilgebiet der theoretischen Physik begegnen, wenn es um mehrdimensionale Ableitungen geht, insbesondere in der Elektrodynamik, wenn wir Maxwell-Gleichungen kennenlernen. Der **dreidimensionale Nabla-Operator** ähnelt notationstechnisch einem Vektor und sieht im dreidimensionalen Raum folgendermaßen aus, wenn wir diesen **mit kartesischen Koordinaten**  $(x, y, z)$  ausdrücken:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Die drei Komponenten des Nabla-Operators sind **partielle Ableitungen nach**  $x$ ,  $y$  und  $z$ . Wir haben die partiellen Ableitungen etwas kompakter mit  $\partial_x$  statt  $\frac{\partial}{\partial x}$  notiert. Diese Notation ist üblich in der theoretischen Physik. Die alleinstehenden Ableitungen  $\partial_x$ ,  $\partial_y$  und  $\partial_z$  werden Differentialoperatoren genannt. Du kannst einen Differentialoperator auf eine Funktion  $f$  anwenden. Das Ergebnis ist die Ableitung der Funktion. Zum Beispiel:  $\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x}$ .

Wir können den Nabla-Operator auf drei unterschiedliche Arten auf eine Skalarfunktion  $f$  oder auf ein Vektorfeld  $\mathbf{F}$  anwenden:

- Als **Multiplikation** mit einer Skalarfunktion:  $\nabla f$ . Das Ergebnis  $\nabla f$  heißt **Gradient** der Skalarfunktion  $f$ .
- Als **Skalarprodukt** mit einem Vektorfeld:  $\nabla \cdot \mathbf{F}$ . Das Ergebnis  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  heißt **Divergenz** des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$ .
- Als **Kreuzprodukt** mit einem Vektorfeld:  $\nabla \times \mathbf{F}$ . Das Ergebnis  $\nabla \times \mathbf{F}$  heißt **Rotation** des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$ .

## 5.1 Gradient

**Mehr:** [de.fufaev.org/gradient](http://de.fufaev.org/gradient)

Schauen wir uns die erste Anwendung des Nabla-Operators in Form des **Gradienten**  $\nabla f$  einer Skalarfunktion  $f$  an. Hier wenden wir den Nabla-Operator  $\nabla$  auf die Funktion  $f$  an. Dem Gradienten werden wir beispielsweise in den Maxwell-Gleichungen begegnen:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_x f(x, y, z) \\ \partial_y f(x, y, z) \\ \partial_z f(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Das Ergebnis 5.2 wird als **Gradient** bezeichnet und stellt ein **dreidimensionales Vektorfeld**  $\nabla f$  mit drei Komponenten dar:

- Die erste Komponente enthält die Steigung  $\partial_x f$  der Funktion  $f(x, y, z)$  in  $x$ -Richtung.
- Die zweite Komponente enthält die Steigung  $\partial_y f$  der Funktion  $f(x, y, z)$  in  $y$ -Richtung.
- Die dritte Komponente enthält die Steigung  $\partial_z f$  der Funktion  $f(x, y, z)$  in  $z$ -Richtung.

Natürlich können wir auch einen **zweidimensionalen Nabla-Operator**  $\nabla_{2d}$

benutzen, der nur zwei Komponenten hat. Ein zweidimensionaler Gradient einer Funktion  $f(x, y)$  sieht dann folgendermaßen aus:

$$\nabla_{2d} f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_x f(x, y, z) \\ \partial_y f(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Und der **eindimensionale Nabla-Operator**  $\nabla_{1d}$  hat nur eine Komponente. Angewendet auf eine eindimensionale Funktion  $f(x)$ , ist der Gradient einfach die **partielle Ableitung der Funktion**:

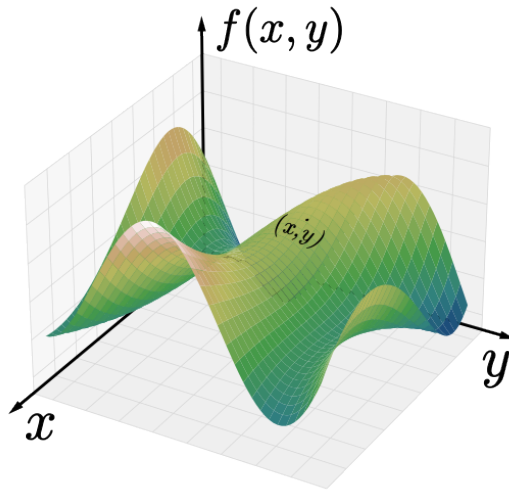
$$\nabla_{1d} f(x, y, z) = \partial_x f(x, y, z) \quad (5.4)$$

■ **Beispiel 5.1 — Gradient einer Funktion berechnen.** Gegeben ist eine skalare Funktion  $f(x, y, z) = x^2 + 5xy + z$ . Der Gradient dieser Skalarfunktion ist:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x + 5y \\ 5x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

■

Der Ergebnisvektor  $\nabla f(x, y, z)$  zeigt an jedem Ort  $(x, y, z)$  **zum steilsten Anstieg der Funktion**  $f(x, y, z)$ . Schau dir beispielsweise den folgenden Plot einer zweidimensionalen Skalarfunktion an  $f(x, y)$ :



Stelle dir an jedem Ort auf der grünen Funktion einen Vektor, der an dem Ort dir die Richtung des steilsten Anstiegs oder Abstiegs zeigt.

## 5.2 Divergenz

**Mehr:** [de.fufaev.org/divergenz](http://de.fufaev.org/divergenz)

Schauen wir uns die zweite Anwendung des Nabla-Operators an, nämlich die **Divergenz**  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  eines **Vektorfeldes**  $\mathbf{F}$ . Hier wenden wir den Nabla-Operator  $\nabla$  auf die vektorwertige Funktion  $\mathbf{F}(x, y, z)$  an. Genauso wie dem Gradienten  $\nabla f$ , werden wir auch der Divergenz beispielsweise in den Maxwell-Gleichungen begegnen.

**Für die Divergenz bilden wir das Skalarprodukt**  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  zwischen dem Nabla-Operator und dem Vektorfeld  $\mathbf{F}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) &= \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{bmatrix} \\ &= \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z \end{aligned} \quad (5.6)$$

Im letzten Schritt haben wir die Argumente für mehr Kompaktheit weggelassen. Das Ergebnis  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  des Skalarprodukts ist eine dreidimensionale Skalarfunktion.

Beim Gradienten wurde aus einer Skalarfunktion ein Vektorfeld erzeugt. Bei der Divergenz machen wir **aus einem Vektorfeld eine Skalarfunktion**. Also genau andersherum!

■ **Beispiel 5.2 — Divergenz eines Vektorfelds berechnen.** Gegeben ist folgendes dreidimensionales Vektorfeld:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x^3 \\ zy \\ 5xy \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Dann ist die Divergenz dieses Vektorfeldes die folgende Skalarfunktion:

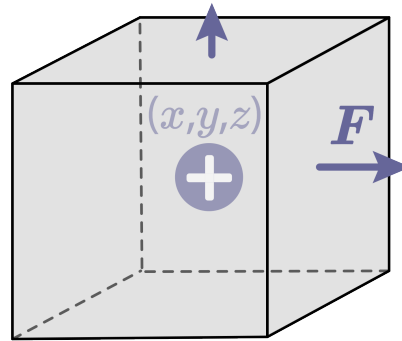
$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \underbrace{\partial_x(2x^3)}_{6x^2} + \underbrace{\partial_y(zy)}_z + \underbrace{\partial_z(5xy)}_0 \quad (5.8)$$

■

Wird also ein konkreter Ort  $(x, y, z)$  in die Skalarfunktion  $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z)$  eingesetzt, dann spuckt diese Funktion eine Zahl aus. Diese Zahl ist ein Maß für die Divergenz des Vektorfeldes an dem betrachteten Ort  $(x, y, z)$ . Es kann dabei eine positive oder negative Zahl herauskommen oder sogar Null. Je nachdem, ob die Zahl positiv, negativ oder Null ist, hat sie eine andere physikalische Bedeutung.

### 5.2.1 Positive Divergenz = Quelle

Wir gehen davon aus, dass wir einen konkreten Ort, z.B. soetwas wie  $(x, y, z) = (1, 0, 3)$ , in das Ergebnis  $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z)$  eingesetzt haben und dabei eine positive Zahl erhalten:  $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) > 0$ . Dann ist der Ort  $(x, y, z)$  eine **Quelle des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$** .

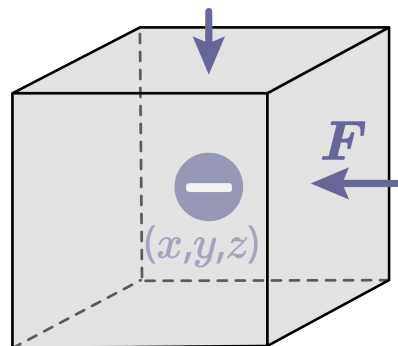


Warum nennen wir den Ort eine Quelle? Wenn wir diesen Ortspunkt in einen gedachten Würfel einschließen würden, dann würde das Vektorfeld aus dem Würfel hauptsächlich herauszeigen.

Du kannst dir die Quelle anschaulich wie ein Loch vorstellen, aus dem das Wasser kommt und die Würfeloberfläche verlässt. Auch, wenn wir mit der Divergenz eine Wasserquelle beschreiben können, benutzen wir die Divergenz in diesem Buch eher zur Beschreibung der elektrischen Ladungen. In diesem Fall entspricht das Vektorfeld  $\mathbf{F}$  dem elektrischen Feld  $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ . Dann repräsentiert die Quelle am Ort  $(x, y, z)$  **eine positive elektrische Ladung**.

### 5.2.2 Negative Divergenz = Senke

Wenn wir dagegen nach dem Einsetzen des Ortes  $(x, y, z)$  in  $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z)$  eine negative Zahl erhalten:  $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) < 0$ , dann sprechen wir von einer **Senke** des Vektorfeldes  $\mathbf{F}(x, y, z)$ .





Schließen wir den Ort mit einem gedachten Würfel ein, dann **fließt das Vektorfeld in die Oberfläche hinein**. Die Senke können wir uns wie ein Loch vorstellen, in das das Wasser hineinströmt. Dazu muss das Wasser in den Würfel hinein. Wenn wir annehmen, dass das Vektorfeld ein elektrische Feld ist:  $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ , dann entspricht die Senke am Ort  $(x, y, z)$  einer **negativen elektrischen Ladung**.

■ **Beispiel 5.3 — Senke eines Vektorfeldes.** Schauen wir uns das folgende Vektorfeld an:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x \\ y \\ 4 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Berechnen wir die Divergenz dieses Vektorfeldes:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \underbrace{\partial_x(-2x)}_{-2} + \underbrace{\partial_y(y)}_1 + \underbrace{\partial_z(4)}_0 = -1 \quad (5.10)$$

Das betrachtete Vektorfeld hat an jedem Ort  $(x, y, z)$  eine konstante, negative Divergenz. Das heißt, egal welcher Ort für  $(x, y, z)$  eingesetzt wird, jeder Ort hat eine negative Divergenz mit dem Wert -1. Überall sind Senken des Vektorfeldes 5.9 verteilt. Wäre das Vektorfeld ein elektrisches Feld  $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ , dann würde dieses Ergebnis bedeuten, dass überall im Raum eine negative elektrische Ladung verschmiert ist.

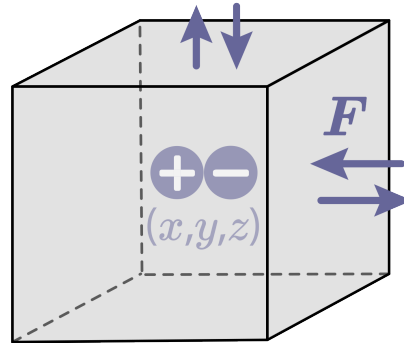
■

### 5.2.3 Divergenzfreies Vektorfeld

Nun gehen davon aus, dass wir Null erhalten, nachdem wir einen konkreten Ort  $(x, y, z)$  in das Divergenzfeld eingesetzt haben:  $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ . Dann ist der Ort  $(x, y, z)$  **divergenzfrei**.

Wenn wir diesen Ort mit einer Würfeloberfläche umschließen, dann fließt das Vektorfeld weder heraus noch hinein. Oder es zeigt genauso viel vom Vektorfeld

in die Oberfläche hinein wie heraus, sodass sich die beiden entgegengesetzten Beiträge aufheben und die Divergenz netto Null ist.



Wir können uns das so vorstellen, als würde der Würfel eine Quelle (z.B. Wasserquelle) und eine Senke (z.B. Abfluss) einschließen, sodass sich die Menge des hereinfließenden Wassers und herausfließendes Wasser sich gegenseitig weghebt. Interpretieren wir das Vektorfeld als das elektrische Feld  $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ , dann könnte an dem betrachteten divergenzfreien Ort **ein elektrischer Dipol** sitzen. Er besteht aus einer positiven (Quelle) und negativen (Senke) Ladung.

■ **Beispiel 5.4 — Divergenzfreies Vektorfeld.** Berechnen wir die Divergenz am Ort  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$  des folgenden Vektorfeldes

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} -2x \\ 0.5y^2 \\ 0.5z^2 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Berechnen wir die Divergenz dieses Vektorfeldes:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) &= \underbrace{\partial_x(-2x)}_{-2} + \underbrace{\partial_y(0.5y^2)}_y + \underbrace{\partial_z(0.5z^2)}_z \\ &= -2 + y + z \end{aligned} \quad (5.12)$$

Setze den Ort  $(1, 1, 1)$  in die berechnete Skalarfunktion ?? ein:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(1, 1, 1) = -2 + 1 + 1 = 0 \quad (5.13)$$

Die Divergenz des betrachteten Vektorfeldes an diesem Ort ist Null. Am Ort  $(1, 1, 1)$  befindet sich also weder eine Quelle noch eine Senke oder ein idealer elektrischer Dipol. ■

## 5.3 Rotation

Wie bei der Divergenz (Skalarprodukt  $\nabla \cdot \mathbf{F}$ ) wenden wir den Nabla-Operator auch bei der **Rotation** (Kreuzprodukt  $\nabla \times \mathbf{F}$ ) auf ein Vektorfeld  $\mathbf{F}$  an:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) &= \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Im letzten Schritt haben wir die Argumente für mehr Kompaktheit weggelassen. Das Ergebnis des Kreuzprodukts ist wieder ein Vektorfeld mit drei Komponenten. Die Rotation  $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)$  eines Vektorfeldes liefert uns also ein anderes Vektorfeld.

Anschaulich können wir uns die Rotation  $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)$  des Vektorfeldes am Ort  $(x, y, z)$  tatsächlich so wie der Name uns sagt, als das **Zirkulieren des Vektorfeldes um den Ort  $(x, y, z)$  herum**.

■ **Beispiel 5.5 — Rotation eines Vektorfeldes berechnen.** Betrachten wir wieder

das folgende Vektorfeld am Ort  $(1, 1, 1)$ :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x^3 \\ zy \\ 5xy \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Das Vektorfeld  $\mathbf{F}(1, 1, 1)$  an diesem Ort ist:

$$\mathbf{F}(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Die Rotation des Vektorfeldes ist:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \partial_y(5xy) - \partial_z(zy) \\ \partial_z(2x^3) - \partial_x(5xy) \\ \partial_x(zy) - \partial_y(2x^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x - y \\ -5y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Einsetzen des Ortes  $(1, 1, 1)$  ergibt den Rotationsvektor:

$$\nabla \times \mathbf{F}(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

■

Nun kannst du dir hoffentlich vorstellen, was das Kreuzprodukt  $\nabla \times \mathbf{F}$  mit dem Vektorfeld  $\mathbf{F}$  anschaulich bedeutet. Der Rotation werden wir im Kapitel über Maxwell-Gleichungen begegnen.

# 6. Gauß-Integralsatz

**Mehr:** [de.fufaev.org/gauss-integralsatz](http://de.fufaev.org/gauss-integralsatz)

Dem Gauß-Integralsatz (manchmal auch Divergenz-Satz oder Satz von Gauß genannt) werden wir bei den Maxwell-Gleichungen begegnen. Dieser Integralsatz besagt, dass die Summe der Quellen und Senken in einem Volumen gleich dem Fluss durch die Volumenoberfläche entspricht oder mathematisch ausdrückt:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dv = \oint_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \quad (6.1)$$

Bitte was? Fragst du dich wahrscheinlich. Keine Angst. Wir dröseln den Integralsatz in seine Bestandteile auf, sodass du ihn hundertprozentig verstehst.

## 6.1 Das Flächenintegral im Gauß-Integralsatz

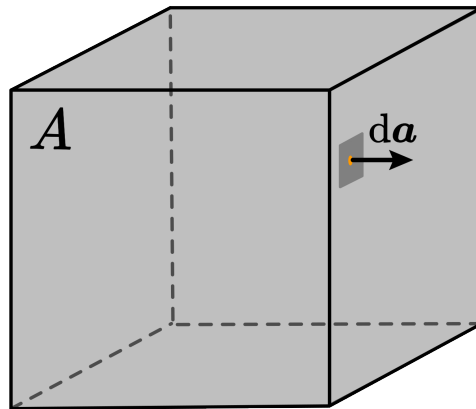
Schauen wir uns zuerst die rechte Seite des Gauß-Integralsatzes 6.1 an, nämlich das Flächenintegral:

$$\oint_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$$

Das  $A$  steht für eine **Oberfläche**, die **irgendein Volumen einschließt**, zum Beispiel die Oberfläche eines Würfels, einer Kugel oder die Oberfläche einer beliebigen dreidimensionalen Form, die du dir denken kannst. Der kleine Kreis um das Integral herum soll andeuten, dass diese Oberfläche eine Bedingung erfüllen muss: Sie muss **geschlossen** sein, das heißt sie darf keine Löcher enthalten, damit die Gleichheit in 6.1 mathematisch erfüllt ist. Die Oberfläche  $A$  ist also eine geschlossene Oberfläche.

Das  $\mathbf{F}$  ist irgendein **Vektorfeld**:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ , also ein Vektor mit drei Komponenten  $F_x(x, y, z)$ ,  $F_y(x, y, z)$  und  $F_z(x, y, z)$ , wie in Gl. 4.1 gezeigt. Das Vektorfeld könnte beispielsweise ein **elektrisches Feld**  $\mathbf{F} = \mathbf{E}$  oder ein **magnetisches Feld**  $\mathbf{F} = \mathbf{B}$  repräsentieren.

Das  $d\mathbf{a}$  ist ein **infinitesimales Flächenelement**, also ein unendlich kleines Flächenstück der betrachteten Oberfläche  $A$ . Wie Du vielleicht schon bemerkt hast, ist das  $d\mathbf{a}$ -Element fett dargestellt, es ist also ein Vektor, mit drei Komponenten  $da_x$ ,  $da_y$  und  $da_z$ . Der Vektor hat natürlich auch einen Betrag und eine Richtung. Der Betrag  $|d\mathbf{a}| = da$  gibt dabei den Flächeninhalt dieses kleinen Flächenstücks an. Der  $d\mathbf{a}$ -Vektor steht orthogonal auf dem Flächenstück und zeigt **aus der Oberfläche heraus**.



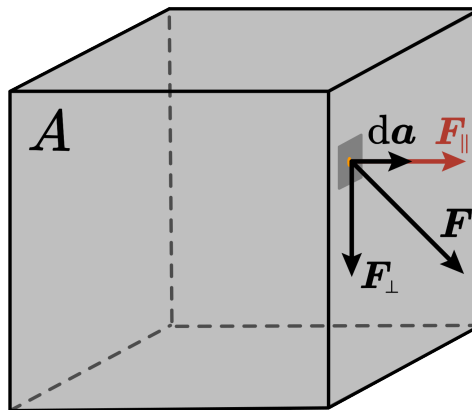
Der Punkt  $\cdot$  in  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$  ist das **Skalarprodukt**. Diese Vektoroperation solltest du aus den Grundlagen der Mathematik kennen. Das Skalarprodukt ist eine Möglichkeit, zwei Vektoren miteinander zu multiplizieren. In dem

Gauß-Integralsatz wird also das Skalarprodukt zwischen dem Vektorfeld  $\mathbf{F}$  und dem  $d\mathbf{a}$ -Flächenstück gebildet. Ausgeschrieben sieht das Skalarprodukt folgendermaßen aus:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = F_x da_x + F_y da_y + F_z da_z \quad (6.2)$$

Die Aufgabe dieses Skalarproduktes ist es den Teil des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$  am Ort  $(x, y, z)$  herauszupicken, der senkrecht auf der Oberfläche steht, der also parallel zum  $d\mathbf{a}$ -Flächenelement zeigt. Wie ist das zu verstehen? Mathematisch können wir das Vektorfeld  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}$  in zwei Anteile aufspalten:

- In den Anteil  $\mathbf{F}_{\parallel}$ , der **parallel zum  $d\mathbf{a}$ -Flächenelement** zeigt.
- In den Anteil  $\mathbf{F}_{\perp}$ , der **senkrecht zum  $d\mathbf{a}$ -Flächenelement** zeigt.



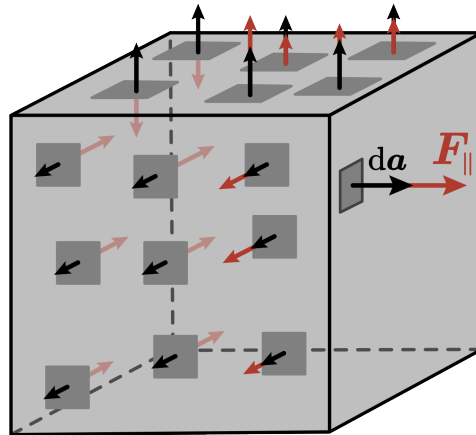
Das Skalarprodukt  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$  am Ort  $(x, y, z)$  auf der Oberfläche eliminiert den senkrechten Anteil des Vektorfeldes und lässt nur den zum Element parallelen Anteil des Vektorfeldes übrig:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} &= (\mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}) \cdot d\mathbf{a} \\ &= \mathbf{F}_{\parallel} \cdot d\mathbf{a} + \underbrace{\mathbf{F}_{\perp} \cdot d\mathbf{a}}_0 = \mathbf{F}_{\parallel} \cdot d\mathbf{a} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Warum nochmal ist der senkrechte Anteil Null? Weil das Skalarprodukt zweier senkrecht zueinander stehender Vektoren  $\mathbf{F}$  und  $d\mathbf{a}$  mathematisch Null ergibt.

Das Skalarprodukt  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$  stellt also sicher, dass wir im Gauß-Integralsatz nur den Anteil  $\mathbf{F}_{\parallel}$  des Vektorfeldes nehmen, der senkrecht aus der Oberfläche heraustritt oder in die Oberfläche eintritt. Alles, was »an der Oberfläche vorbeigeht« (damit meine ich den zur Oberfläche parallelen Anteil  $\mathbf{F}_{\perp}$ ), fällt im Gauß-Integralsatz weg.

Anschließend werden auf der rechten Seite des Gauß-Integralsatzes 6.1 die Skalarprodukte  $\mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{a}(x, y, z)$  für jeden Ortspunkt  $(x, y, z)$  auf der Oberfläche  $A$  mithilfe des Integrals in 6.1 aufsummiert.



Bezeichnen wir die rechte Seite des Gauß-Integralsatzes kurz mit  $\Phi$ :

$$\Phi = \oint_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \quad (6.4)$$

Das Flächenintegral ergibt also eine Zahl  $\Phi$ , die ein Maß dafür ist, wie viel von dem Vektorfeld  $\mathbf{F}$  aus der Oberfläche  $A$  hinein- oder heraustritt. Das Flächenintegral ist der **Fluss  $\Phi$  des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$  aus der Oberfläche  $A$** . Im Kapitel zu den Maxwell-Gleichungen werden wir den elektrischen und magnetischen Fluss kennenlernen.

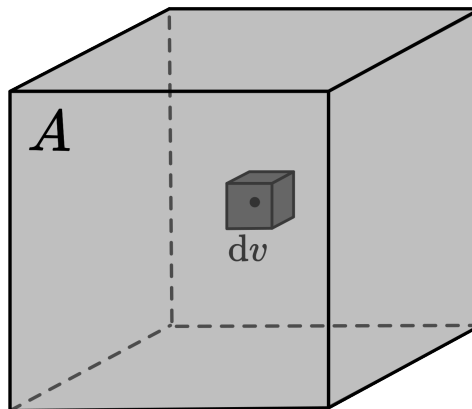


## 6.2 Das Volumenintegral im Gauß-Integralsatz

Schauen wir nun die linke Seite des Gauß-Integralsatzes 6.1 an, nämlich das Volumenintegral:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dv \quad (6.5)$$

Das  $V$  steht für ein **Volumen**, doch nicht für irgendein Volumen, sondern es ist das Volumen, welches **von der Oberfläche  $A$  eingeschlossen** wird. Wenn  $A$  beispielsweise die Oberfläche eines Würfels ist, dann ist  $V$  das Volumen dieses Würfels. Das  $dv$  ist ein **infinitesimales Volumenelement**, also ein unendlich kleines Volumenstück des betrachteten Volumens  $V$ .



Im Integranden  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  des Volumenintegrals steht  $\nabla$  für den **Nabla-Operator**, den wir im Kapitel 5 kennengelernt haben. Dieser Operator ist zwar mathematisch gesehen kein Vektor, sieht aber wie ein Vektor aus. So ein Operator, wie der Nabla-Operator, entfaltet nur dann seine Wirkung, wenn dieser auf ein Feld angewendet wird. Und das passiert ja auch im Integranden  $\nabla \cdot \mathbf{F}$ . Es wird der Nabla-Operator  $\nabla$  **auf das Vektorfeld  $\mathbf{F}$  angewendet**, indem das Skalarprodukt zwischen dem Nabla-Operator und dem Vektorfeld gebildet wird. Ausgeschrieben entspricht dieses Skalarprodukt der Summe der

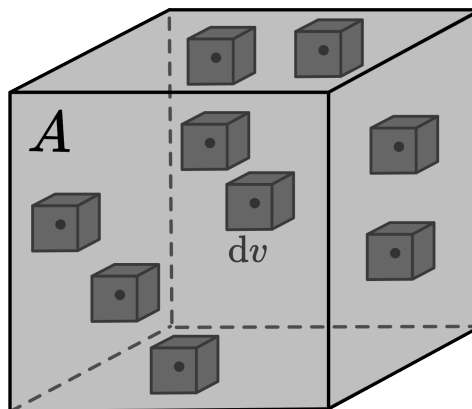
Ableitungen des Vektorfeldes nach den Ortskoordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z \quad (6.6)$$

Der Integrand  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  ist also die **Divergenz des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$** . Was die Divergenz ist, haben wir im Kapitel 5.2. kennengelernt. Das Ergebnis  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  ist kein Vektor mehr, sondern ein Skalar, der entweder positiv, negativ oder Null sein kann:

- Wenn die Divergenz **am Ort**  $(x, y, z)$  **positiv** ist:  $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) > 0$ , dann ist an dem Ort eine **Quelle des Vektorfeldes**. Die Quelle entspricht in der Elektrodynamik einer positiven Ladung.
- Wenn die Divergenz **am Ort**  $(x, y, z)$  **negativ** ist:  $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) < 0$ , dann ist an dem Ort eine **Senke des Vektorfeldes**. Die Quelle entspricht in der Elektrodynamik einer negativen Ladung.
- Wenn die Divergenz **am Ort**  $(x, y, z)$  **Null** ist:  $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ , dann ist dieser Ort **weder eine Senke noch eine Quelle** des Vektorfeldes. Das Vektorfeld tritt nicht in die Oberfläche hinein und nicht heraus **oder** das Vektorfeld tritt genauso viel hinein wie hinaus, sodass sich die beiden Flüsse gegenseitigen aufheben.

Anschließend werden im Volumenintegral 6.5 die Divergenzen  $\nabla \times \mathbf{F}$  (also alle Quellen und Senken) an jedem Ort  $(x, y, z)$  innerhalb des Volumens  $V$  mit einem Integral aufsummiert.



Das Volumenintegral 6.5 im Gauß-Integralsatz ist eine Zahl, die misst, **wie viele Senken und Quellen innerhalb des Volumens  $V$**  zu finden sind.

Fassen wir also die Aussage des Gauß-Integralsatzes 6.1 zusammen:

- Das Volumenintegral auf der linken Seite beschreibt die **Summe der Quellen und Senken** des Vektorfeldes innerhalb eines Volumens  $V$ :

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) \, dv$$

- Das Flächenintegral auf der rechten Seite beschreibt den **Fluss  $\Phi$  des Vektorfeldes** durch die Oberfläche  $A$  dieses Volumens  $V$ :

$$\oint_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$$

Nach dem Gauß-Integralsatz sind beide Integrale gleich.

Der Gauß-Integralsatz sagt also aus: **Die Summe der Quellen und Senken eines Vektorfeldes  $\mathbf{F}$  innerhalb eines Volumens  $V$  entspricht dem Fluss  $\Phi$  durch die Oberfläche  $A$  dieses Volumens.**



# 7. Stokes-Integralsatz

**Mehr:** [de.fufaev.org/stokes-integralsatz](https://de.fufaev.org/stokes-integralsatz)

Neben dem Gauß-Integralsatz werden wir auch den **Stokes-Integralsatz** (Satz von Stokes) brauchen, um beispielsweise die Maxwell-Gleichungen tiefgreifend zu verstehen. Der Stokes-Integralsatz besagt, dass die **Rotation eines Vektorfeldes innerhalb einer Fläche gleich der Rotation des Vektorfeldes entlang des Randes dieser Fläche** ist. Mathematisch ausgedrückt sieht dieser Integralsatz folgendermaßen aus:

$$\int_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (7.1)$$

Wenn du den Gauß-Integralsatz verstanden hast, sollte dir der Stokes-Integralsatz nicht mehr total kryptisch vorkommen. Das **Vektorfeld**  $\mathbf{F}(x, y, z)$  kennst du bereits. Es hängt von drei Raumkoordinaten ab und hat als Vektor drei Komponenten. Das **Skalarprodukt**  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ , aber auch der **Nabla-Operator**  $\nabla$  und das **infinitesimale Flächenstück**  $d\mathbf{a}$  sollten dir bekannt vorkommen, wenn du das Kapitel 6 über den Gauß-Integralsatz gelesen hast.

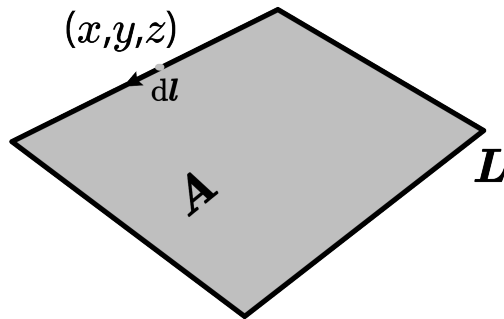
## 7.1 Das Linienintegral im Stokes-Integralsatz

Betrachten wir zuerst das Linienintegral auf der rechten Seite des Stokes-Integralsatzes 7.1, nämlich:

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

Das Symbol  $L$  am Integral repräsentiert eine **Linie im dreidimensionalen Raum**. Der Kreis am Integralzeichen gibt an, dass diese **Linie geschlossen** sein muss, das heißt, ihr Anfang und ihr Ende sind miteinander verbunden. Eine derartige geschlossene Linie bezeichnen wir kurz als **Schleife**.

Das  $d\mathbf{l}$  ist ein **infinitesimales Linienelement** der Linie, also ein unendlich kleines Stück der Linie. Auch hier sollte dir auffallen, dass das  $d\mathbf{l}$ -Linienelement in fett dargestellt ist, das heißt es ist ein Vektor mit drei Komponenten:  $dl_x$ ,  $dl_y$  und  $dl_z$ . Der Betrag  $dl$  des Linienelements gibt die Länge von  $d\mathbf{l}$  an, während seine Richtung **entlang der Linie** zeigt.



Dann wird auf der rechten Seite das Skalarprodukt  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$  zwischen einem Vektorfeld und dem Linienelement gebildet. Ausgeschrieben sieht das Skalarprodukt folgendermaßen:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = F_x dl_x + F_y dl_y + F_z dl_z \quad (7.2)$$

Was die Aufgabe dieses Skalarproduktes ist, hast du ja bereits im Kapitel 6 über

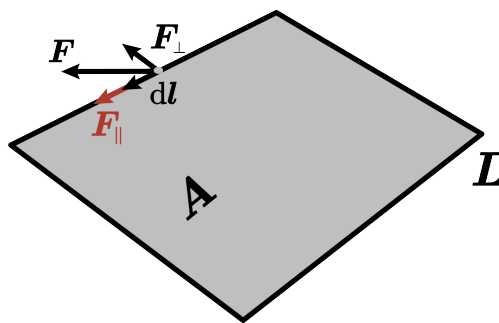
den Gauß-Integralsatz kennengelernt. Hier die Wiederholung: Zuerst teilst du das Vektorfeld  $\mathbf{F}$  in zwei Anteile auf:

- In den Anteil  $\mathbf{F}_{\parallel}$ , der **parallel zum  $d\mathbf{l}$ -Linielement** verläuft.
- In den Anteil  $\mathbf{F}_{\perp}$ , der **senkrecht zum  $d\mathbf{l}$ -Linielement** verläuft.

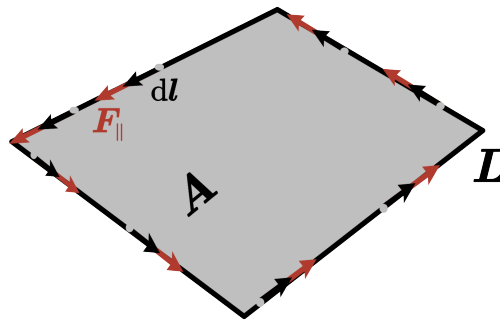
Das Skalarprodukt  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$  **eliminiert den senkrechten Anteil** des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$  und lässt nur den zum  $d\mathbf{l}$ -Element parallelen Anteil  $\mathbf{F}_{\parallel}$  des Vektorfeldes übrig. Das Skalarprodukt zweier senkrecht zueinander stehender Vektoren  $\mathbf{F}_{\perp}$  und  $d\mathbf{l}$  ergibt mathematisch Null:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= (\mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \mathbf{F}_{\parallel} \cdot d\mathbf{l} + \underbrace{\mathbf{F}_{\perp} \cdot d\mathbf{l}}_0 = \mathbf{F}_{\parallel} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Da das Linielement  $d\mathbf{l}$  an jedem Punkt der Linie parallel zur Linie verläuft, bleibt im Skalarprodukt  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$  nur der parallele Anteil  $\mathbf{F}_{\parallel}$  des Vektorfeldes übrig, der natürlich auch entlang der Linie  $L$  verläuft. Alle anderen Anteile des Vektorfeldes fallen weg.



Anschließend werden auf der rechten Seite des Stokes-Integralsatzes die Skalarprodukte für jeden Ort  $(x, y, z)$  auf der Linie  $L$  mithilfe des Linienintegrals aufsummiert.



Bezeichnen wir die rechte Seite des Stokes-Integralsatzes kurz mit  $U$ :

$$U = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (7.4)$$

Das Linienintegral ergibt also eine Zahl  $U$ , die ein Maß dafür ist, wie viel von dem Vektorfeld entlang der Linie verläuft. Weil die Linie  $L$  in sich geschlossen ist, kommt die Summation wieder am selben Punkt  $(x, y, z)$  an, wo die Summation begonnen hat. Das geschlossene Linienintegral  $U$  gibt also anschaulich an, **wie viel von dem Vektorfeld  $\mathbf{F}$  entlang der geschlossenen Linie  $L$  rotiert.**

## 7.2 Das Flächenintegral im Stokes-Integralsatz

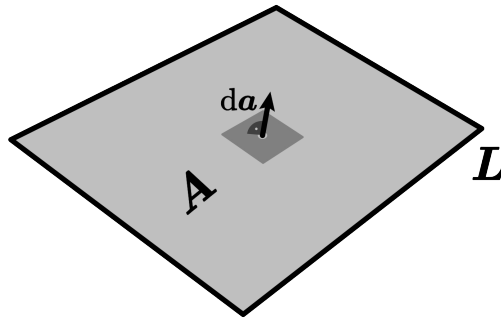
Betrachten wir nun das Flächenintegral auf der linken Seite des Stokes-Integralsatzes 7.1, nämlich:

$$\int_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a}$$

Im Flächenintegral kommt die Fläche  $A$  vor. Im Gegensatz zum Flächenintegral mit einem Kreis um das Integralzeichen, wie beim Gauß-Integralsatz, betrachten wir hier eine **offene Fläche**. Sie schließt also kein Volumen ein. Das ist lediglich eine Fläche, die **von der Schleife  $L$  eingeschlossen** wird.

Der Vektor  $d\mathbf{a} = (da_x, da_y, da_z)$  repräsentiert ein unendlich kleines Flächenstück der Fläche  $A$  und steht senkrecht an jedem Ortspunkt  $(x, y, z)$  auf dieser Fläche.





Im Flächenintegral taucht außerdem das **Kreuzprodukt**  $\nabla \times \mathbf{F}$  zwischen dem Nabla-Operator und dem Vektorfeld auf. Was das Kreuzprodukt anschaulich bedeutet, solltest du bereits aus den Grundlagen der Mathematik kennen. Das Kreuzprodukt ist neben dem Skalarprodukt die zweite Möglichkeit, Vektoren miteinander zu multiplizieren. Das Kreuzprodukt  $\nabla \times \mathbf{F}$  ist die **Rotation des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$** .

Im Gegensatz zum Skalarprodukt ist das Ergebnis des Kreuzprodukts  $\nabla \times \mathbf{F}$  wieder ein **Vektorfeld, das senkrecht zu  $\mathbf{F}$**  ist. Warum senkrecht? Weil das die Eigenschaft des Kreuzproduktes ist! Wenn wir das Kreuzprodukt konkret ausschreiben, dann sieht der Ergebnisvektor  $\nabla \times \mathbf{F}$  folgendermaßen aus:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

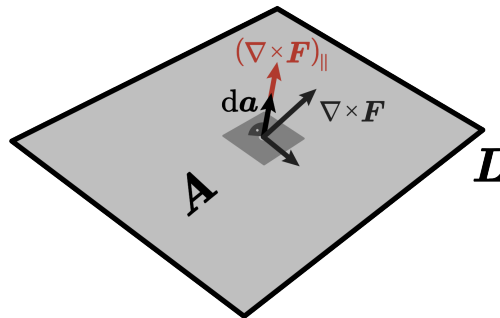
Was bedeutet die Rotation anschaulich?

Der Vektor  $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)$  gibt an, **wie stark das Vektorfeld  $\mathbf{F}$**  am Ort  $(x, y, z)$ , der sich innerhalb der Fläche  $A$  befindet, **rotiert**.

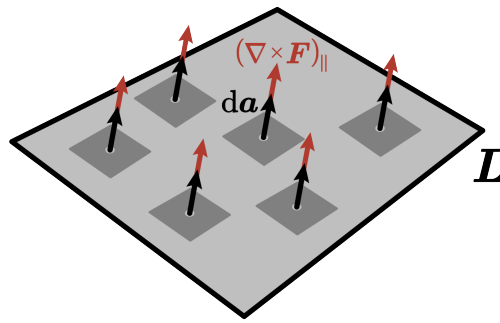
Dann wird im Flächenintegral des Stokes-Integralsatzes das Skalarprodukt  $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a}$  zwischen dem Rotationsvektorfeld  $(\nabla \times \mathbf{F})$  und dem infinitesimalen Flächenelement  $d\mathbf{a}$  gebildet. Mit dem Skalarprodukt wird, wie wir bereits wissen, nur der Anteil  $(\nabla \times \mathbf{F})_{\parallel}$  des Rotationsvektorfeldes herausgepickt, der parallel zum Flächenelement verläuft:

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} &= ((\nabla \times \mathbf{F})_{\parallel} + (\nabla \times \mathbf{F})_{\perp}) \cdot d\mathbf{a} & (7.6) \\
 &= (\nabla \times \mathbf{F})_{\parallel} \cdot d\mathbf{a} + \underbrace{(\nabla \times \mathbf{F})_{\perp} \cdot d\mathbf{a}}_0 \\
 &= (\nabla \times \mathbf{F})_{\parallel} \cdot d\mathbf{a}
 \end{aligned}$$

Da das Flächenelement  $d\mathbf{a}(x, y, z)$  am einem Ortspunkt senkrecht auf dem jeweiligen Flächenstück steht, pickt das Skalarprodukt ?? nur den Anteil von Vektorfeldes  $d\mathbf{F}$  heraus, der ebenfalls auf dem Flächenstück senkrecht steht oder anders gesagt: Der Feldanteil, der parallel zum  $d\mathbf{a}(x, y, z)$ -Vektor verläuft. Es bleibt also nur der Anteil  $(\nabla \times \mathbf{F})_{\parallel} \cdot d\mathbf{a}$  im Flächenintegral übrig.



Anschließend werden auf der linken Seite des Stokes-Integralsatzes die Skalarprodukte  $(\nabla \times \mathbf{F})_{\parallel}(x, y, z) \cdot d\mathbf{a}(x, y, z)$  mithilfe des Flächenintegrals an jedem Ort  $(x, y, z)$  aufsummiert.



Fassen wir nun die Aussagen des Flächenintegrals (rechte Seite) und Linienintegrals (linke Seite) des Stokes-Integralsatzes zusammen:

- Auf der linken Seite wird die Rotation  $(\nabla \times \mathbf{F})$  des Vektorfelds  $\mathbf{F}$  an jedem einzelnen Ort innerhalb der Fläche  $A$  aufsummiert:

$$\int_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a}$$

- Auf der rechten Seite wird das Vektorfeld  $\mathbf{F}$  entlang der Umrandung  $L$  der Fläche  $A$  aufsummiert. Die rechte Seite entspricht also einer Zahl, die die Rotation des Vektorfeldes auf der Umrandung misst:

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

Beide Integrale sollen nach dem Stokes-Integralsatz gleich sein.

Der Stokes-Integralsatz sagt also anschaulich aus: **Die gesamte Rotation eines Vektorfeldes  $\mathbf{F}$  innerhalb der Fläche  $A$  entspricht genau der Rotation des Vektorfeldes entlang des Randes  $L$  dieser Fläche.**



# 8. Fourier-Reihe

**Mehr:** [de.fufaev.org/fourier-reihe](http://de.fufaev.org/fourier-reihe)

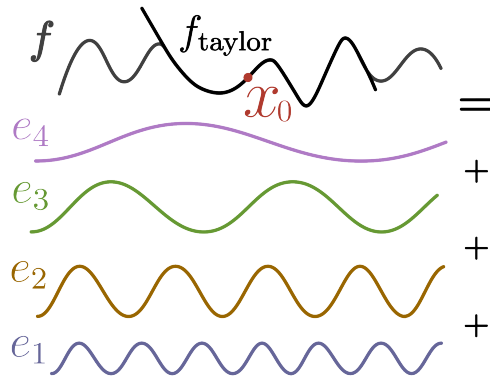
Du kennst sicherlich die Taylor-Entwicklung, mit der wir eine Funktion  $f(x)$  an einem Punkt  $x = x_0$  durch eine einfachere Taylor-Reihe annähern können. Bezeichnen wir die Näherung der exakten Funktion als  $f$ . Je mehr Terme wir in der Taylor-Reihe nehmen, desto besser wird die Näherung  $f$  in der Umgebung des gewählten Entwicklungspunkts  $x_0$ .

Wie du untenstehende Bild daneben siehst, ist die Taylor-Reihe, repräsentiert durch  $f_{\text{taylor}}$ , eine gute Näherung der Funktion  $f$  in der unmittelbaren Umgebung von  $x_0$ . Entfernen wir uns jedoch weiter weg von dem Punkt, dann sehen wir, dass die Taylor-Reihe dort keine gute Näherung ist. Die **Taylor-Entwicklung** ist also eine Methode, mit der wir **eine Funktion nur lokal annähern können**.



Wenn es uns aber wichtig ist, eine **Funktion  $f$  auf einem ganzen Intervall**

anzunähern, dann brauchen wir eine **Fourier-Reihe** der Funktion. Wie wir sehen werden, ist die Fourier-Reihe eine Linearkombination von simplen periodischen **Basisfunktionen** ( $e_1, e_2, e_3, e_4, \dots$ ) wie Cosinus und Sinus oder komplexen Exponentialfunktionen, die in der Summe (Reihe) die Funktion  $f$  in einem gewählten Intervall annähern können. Im Folgenden gehen wir von einem **Intervall der Länge  $L$**  aus.



## 8.1 Das Konzept von Fourier-Reihen

Wir können einen **Vektor  $v$** , der in einem  $n$ -dimensionalen Vektorraum lebt, als eine **Linearkombination von Basisvektoren  $\{e_k\}$**  darstellen, die den Vektorraum aufspannen:

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + \dots + v_n e_n = \sum_{k=1}^n v_k e_k \quad (8.1)$$

Die Darstellung des Vektors als Linearkombination solltest du aus der linearen Algebra kennen! Mithilfe einer Basis  $\{e_k\}$  können wir jeden möglichen Vektor  $v$  in diesem Vektorraum darstellen. Hierbei sind  $v_k$  die **Komponenten des Vektors in der gewählten Basis**. Die Wahl der **Basis ist nicht eindeutig**, daher können die Komponenten  $v_k$  unterschiedlich sein. Durch die Wahl einer anderen Basis hat der Vektor andere Komponenten! Das solltest du auch bereits wissen.

Wir können dieses Konzept der Linearkombination auch auf **unendlich-dimensionale** Vektoren anwenden. Eine **Funktion**  $f$ , zum Beispiel aus der obigen Illustration, lässt sich als ein unendlich-dimensionaler Vektor  $\mathbf{f}$  interpretieren, den wir als Linearkombination darstellen können. Die **Komponenten**  $v_k$  eines endlichen Vektors **werden zu Fourier-Koeffizienten**  $\hat{f}_k$ , wenn wir eine Funktion und nicht einen endlichen Vektor als Linearkombination darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \hat{f}_1 \mathbf{e}_1 + \hat{f}_2 \mathbf{e}_2 + \hat{f}_3 \mathbf{e}_3 + \dots + v_n \mathbf{e}_n \\ &= \sum_n^k \hat{f}_k \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (8.2)$$

Stellen wir eine Funktion  $f$  als eine Linearkombination 8.4 von Basisfunktionen  $\mathbf{e}_k$  dar, dann bezeichnen wir die Summe 8.4 als **Fourier-Reihe der Funktion**  $f$ . Bei einer Linearkombination **für eine Funktion**, werden die Basisvektoren  $\mathbf{e}_k$  passender als **Basisfunktionen** bezeichnet. In der Optik werden die Basisfunktionen auch **Fourier-Moden** genannt.

Bei Betrachtung der Funktion  $\mathbf{f}$  als Vektor, stellen die **Funktionswerte**  $f(x_0)$ ,  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$  und so weiter bis  $f(x_n) = f(x_0 + L)$ , die Komponenten von  $\mathbf{f}$  dar. Wir können uns die **Funktion**  $f$  als **einen Spaltenvektor** vorstellen:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

Natürlich ist die Darstellung nicht exakt. Das Argument  $x$  der Funktion  $f(x)$  ist reell und es gibt daher **theoretisch unendlich viele Werte** allein schon zwischen  $x_0$  und  $x_1$ .

Diese ganzen Werte haben wir in der Darstellung der Funktion als Spaltenvektor 8.3 weggelassen. Der Spaltenvektor ist also nur ein Nährungsvektor für die Funktion  $f$ . Übrigens: Auf diese Weise wie in 8.3 repräsentieren wir eine quantenmechanische Wellenfunktion als Zustandsvektor in der Computerphysik.

## 8.2 Fourier-Koeffizienten

Die Fourier-Koeffizienten können wir analog wie in der linearen Algebra bestimmen. Wie geht das nochmal in der linearen Algebra? Um die  $k$ -te Komponente eines endlich-dimensionalen Vektors  $\mathbf{v}$  zu bekommen, müssen wir das **Skalarprodukt zwischen dem  $k$ -ten Basisvektor und dem Vektor  $\mathbf{v}$**  bilden:

$$\begin{aligned} v_k &= \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{v} && (8.4) \\ &= e_{k0}v_0 + e_{k1}v_1 + \dots + e_{kn}v_n \\ &= \sum_j^n e_{kj}v_j \end{aligned}$$

Das ausgeschriebene Skalarprodukt haben wir im letzten Schritt mit einem Summenzeichen etwas kompakter notiert und den Summationsindex als  $j$  gewählt. Hierbei sind  $e_{k0}$  bis  $e_{kn}$  die Komponenten des Basisvektor  $\mathbf{e}_k = [e_{k0}, e_{k1}, \dots, e_{kn}]$ .

Wenn wir nicht mit endlich-dimensionalen Vektoren, sondern mit Funktionen arbeiten, dann müssen wir das **Skalarprodukt zwischen der  $k$ -ten Basisfunktion und der Funktion  $f$**  bilden, um den  $k$ -ten Fourier-Koeffizienten von  $f$  zu erhalten:



$$\hat{f}_k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{f} = \langle \mathbf{e}_k | \mathbf{f} \rangle = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(x_0) \\ \mathbf{e}(x_1) \\ \mathbf{e}(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{e}(x_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{f}(x_0) \\ \mathbf{f}(x_1) \\ \mathbf{f}(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{f}(x_n) \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

Um anzudeuten, dass wir hier mit möglicherweise einem unendlich dimensionalen Vektorraum arbeiten, können wir die Operation 8.5 nicht Skalarprodukt, sondern inneres Produkt nennen und es als Physiker in der **Bra-Ket-Notation**  $\langle \mathbf{e}_k | \mathbf{f} \rangle$  notieren. Die Bra-Ket-Notation lernen wir im Kapitel 16.

Beachte, dass wir die Vektoren in 8.5 bis zur  $n$ -Komponente darstellen, weil wir, wie bereits erwähnt, bei einer Fourier-Reihe nur mit Funktionen in einem bestimmten Intervall arbeiten können. Unser gewähltes Intervall  $(x_0, x_n) = (x_0, x_0 + L)$  hat die Länge  $L$ .

Schreiben wir das innere Produkt 8.5 als Summe aus:

$$\hat{f}_k = \langle \mathbf{e}_k | \mathbf{f} \rangle \approx \sum_{x=x_0}^{x_n} e_k(x) f(x) \quad (8.6)$$

Du hast sicherlich das Ungefährzeichen in Gl. 8.6 gesehen. Die Summe ist also nur eine Näherung des Fourier-Koeffizienten  $\hat{f}_k$ . Können wir die Fourier-Koeffizienten  $\hat{f}_k$  **exakt** darstellen? Das geht ganz einfach! Da wir im Fall von exakten Fourier-Koeffizienten mit einer **kontinuierlichen Summation** zu tun haben, müssen wir das Summenzeichen **mit einem Integral ersetzen**. Statt also über  $x$  wie in 8.6 diskret zu summieren, integrieren wir über  $x$ :

$$\hat{f}_k = \langle \mathbf{e}_k | \mathbf{f} \rangle = \int_{x_0}^{x_n} e_k^*(x) f(x) dx \quad (8.7)$$

Wir haben lediglich ein kleines mathematisches Upgrade im Integral

vorgenommen. Die Basisfunktion  $e_k^*(x)$  wurde **komplex konjugiert**. Das Sternchen können wir auch weglassen, wenn wir mit reellen Basisfunktionen arbeiten, da für reelle Basisfunktionen  $e^* = e$  gilt. Um auch komplexe Basisfunktionen zuzulassen, müssen wir jedoch ein Sternchen an die Basisfunktion anhängen. Das **Sternchen im Fall von komplexwertigen Funktion ist wichtig**, damit das Integral 8.7 die **Eigenschaften eines inneren Produkts erfüllt**.

So, nun wissen wir, wie wir die Fourier-Koeffizienten mit dem Integral 8.7 konkret berechnen können und wie die Integralformel 8.7 überhaupt zustande kommt.

### 8.3 Fourier-Basis

Lernen wir nun die Basisfunktionen kennen. **Welche Basisfunktionen  $e_k$  können wir in der Fourier-Reihe von  $f$  benutzen?**

$$f = \sum_k^n \hat{f}_k e_k \quad (8.8)$$

Alle Funktionen, die die **Eigenschaften einer Basis erfüllen!** Damit wir eine Menge von Vektoren, oder wie in unserem Fall, eine Menge von Funktionen  $\{e_k\}$  als Basis bezeichnen können, müssen diese Funktionen zwei Bedingungen erfüllen:

- Wenn wir zwei Basisfunktionen  $e_k$  und  $e_m$  aus der Menge  $\{e_k\}$  nehmen, dann müssen sie **orthonormal** zueinander sein, also **orthogonal und normiert**. Diese Eigenschaft lässt sich mit dem Kronecker-Delta ausdrücken:  $\langle e_k | e_m \rangle = \delta_{km}$ .
- Die Menge  $\{e_k\}$  der Basisfunktionen muss **vollständig** sein. Anders gesagt, sie müssen den Raum, in dem die Funktionen  $f$  leben, aufspannen. Wir müssen mit der Menge  $\{e_k\}$  **jede Funktion  $f$  exakt darstellen können**.

Erst wenn diese beiden Eigenschaften von den Funktionen  $\{e_k\}$  erfüllt sind, können wir diese Funktionen als Basisfunktionen nehmen und damit eine Funktion  $f$  als Fourier-Reihe 8.8 darstellen.

Eine typische Basis  $\{e_k\}$ , die in der Physik benutzt wird, sind die **komplexen Exponentialfunktionen**:

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} \quad (8.9)$$

Der Faktor  $\frac{1}{\sqrt{L}}$  stellt sicher, dass die Basisfunktionen **normiert** sind, also genau die notwendige **1**. Eigenschaft erfüllen. Im Zusammenhang mit der Physik, uns insbesondere in der Optik, bezeichnen wir  $k$  als **Wellenzahl**. Und denk dran, dass  $e$  in  $e^{ikx}$  die **Euler-Zahl** und nicht das Label von der Basisfunktion  $e_k$  ist! Ich sags nur...

Je nach dem, was wir für die Wellenzahl  $k$  einsetzen, bekommen wir eine andere Basisfunktion in 8.9. Wir können natürlich auch eine andere Basis für die Fourier-Reihe wählen, wie beispielsweise Cosinus- und Sinusfunktionen. **Es steht uns frei, eine Basis zu wählen**. Hier haben wir komplexe Exponentialfunktionen als Basis gewählt, weil sie vor allem für die Erklärung der Fourier-Reihe schön kompakt geschrieben werden können.

Die Fourier-Reihe 8.8 der Funktion  $f$  würde in der Exponentialbasis 8.9 folgendermaßen aussehen:

$$f = \sum_k^n \hat{f}_k e_k = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k^n \hat{f}_k e^{ikx} \quad (8.10)$$

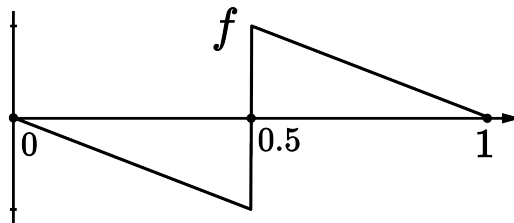
Was können wir nun mit der Fourier-Reihe 8.10 in der Exponentialbasis anfangen? Wie gesagt: Wir können sie nutzen, um irgendeine Funktion  $f$  in einem Intervall zu nähern. Schauen wir uns am besten ein konkretes Beispiel an, dann weißt du, was ich damit meine.

## 8.4 Beispiel: Fourier-Reihe für die Sägezahnfunktion

Betrachten wir als Beispiel die **Sägezahnfunktion** im Intervall  $(0, 1)$ :

$$f = \begin{cases} -x & (0, 0.5) \\ 1-x & (0.5, 1) \end{cases} \quad (8.11)$$

Diese Sägefunktion sieht so aus:



Lass uns die Exponentialbasisfunktionen als unsere Basis für die Fourier-Reihe der Sägezahnfunktion wählen:

$$f = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k^n \hat{f}_k e^{ikx}$$

Die gesamte Intervalllänge ist  $L = 1$ . Damit ist der Normierungsfaktor bei den Exponentialbasisfunktionen auch 1:

$$f = \sum_k^n \hat{f}_k e^{ikx} \quad (8.12)$$

Bei der Bestimmung von Fourier-Reihen müssen wir stets zwei Dinge tun:

- Eine **Basis wählen** und in die Fourier-Reihe einsetzen. Haben wir bereits in Gl. 8.12 getan.
- Die **Fourier-Koeffizienten**  $\hat{f}_k$  mit dem **Integral 8.7** ausrechnen und

in die Fourier-Reihe 8.12 einsetzen. Den  $k$ -ten Fourier-Koeffizienten 8.7 bestimmen wir mit dem inneren Produkt zwischen der  $k$ -ten Basisfunktion und der Sägezahnfunktion  $f$ :

$$\hat{f}_k = \int_{x_0}^{x_n} e_k^*(x) f(x) dx \quad (8.13)$$

$$= \int_0^1 e^{-ikx} f(x) dx \quad (8.14)$$

Beachte, dass die Exponentialbasisfunktion komplex konjugiert im Integral sein muss. Daher kommt das Minuszeichen im Exponenten der Exponentialfunktion. Und die Integrationsgrenzen  $x_0 = 0$  und  $x_n = 1$  sind unsere freie Entscheidung. In diesem Bereich wollen wir die Sägezahnfunktion annähern.

Jetzt liegt es an dir das Integral 8.14 zu lösen, um die Fourier-Koeffizienten konkret zu bestimmen. Ich kann es nicht, also überlasse ich es dir als Übung.

Hier ist jedenfalls die Lösung, die wir benötigen, um sie gleich zu veranschaulichen:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{ik} e^{-ik/2} \quad (8.15)$$

Da wir für die Wellenzahl  $k$  keinen konkreten Wert in 8.15 eingesetzt haben, haben wir damit alle Fourier-Koeffizienten  $\hat{f}_k$  bestimmt. Für einen unterschiedlichen  $k$ -Wert bekommen wir einen anderen Fourier-Koeffizienten in Gl. 8.15.

Setzen wir nur noch die Fourier-Koeffizienten 8.14 in die Fourier-Reihe 8.12 ein

und fassen die beiden Exponentialfunktionen zusammen:

$$f = \sum_k^n \hat{f}_k e^{ikx} \quad (8.16)$$

$$= \sum_k^n \frac{1}{ik} e^{-ik/2} e^{ikx} \quad (8.17)$$

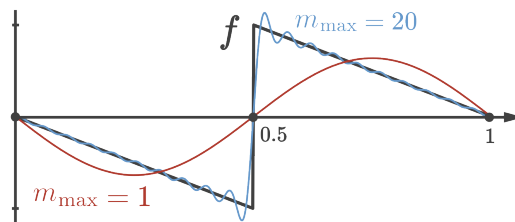
$$= \sum_k^n \frac{1}{ik} e^{ik(x-0.5)} \quad (8.18)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i2\pi m} e^{i2\pi m(x-0.5)} \quad (8.19)$$

Im letzten Schritt haben wir periodische Randbedingungen für  $k = 2\pi m/L$  gewählt, wobei  $m = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  ganze Zahlen annimmt. Wir summieren also sowohl über positive als auch über negative  $m$ .

Wir können entscheiden bis zu welchem  $m_{\max}$  wir in der Fourier-Reihe 8.19 der Sägezahnfunktion summieren wollen. Je größer wir  $m_{\max}$  wählen, desto besser wird unsere Näherung der Funktion  $f$  sein.

Schau dir die Plots für die Näherung  $m_{\max} = 1$  und für eine bessere Näherung  $m_{\max} = 20$  an:



Mit dieser Fourier-Reihe für die Sägezahnfunktion haben wir im Grunde zwei Dinge gewonnen:

- Wir können die Reihe nun bis zu einem bestimmten maximalen Wert:  $m = m_{\max}$  summieren und so eine stetig-differenzierbare **gute Näherung für die Sägezahnfunktion** erhalten.
- Da wir die Fourier-Koeffizienten bestimmt haben, wissen wir, welche

$m$ -Werte in der Sägezahnfunktion enthalten sind ( $m = 0$  ist zum Beispiel nicht enthalten). Wir wissen also aus welchen Bausteinen (Basisfunktionen) die Sägezahnfunktion zusammengesetzt ist. Dieses Aufdröseln der Funktion in einzelne Bestandteile wird als **Fourier-Analyse** bezeichnet.







Die Natur ist extremal

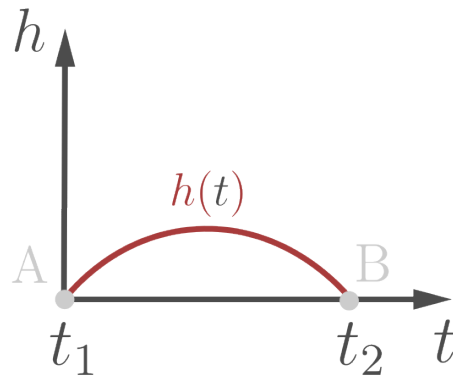


## 9. Wirkungsfunktional

**Mehr:** [de.fufaev.org/euler-lagrange-gleichung](http://de.fufaev.org/euler-lagrange-gleichung)

Die Euler-Lagrange-Gleichung ist ein mächtiges Werkzeug, mit dem wir **Differentialgleichungen** (mit denen solltest du dich auskennen) **für ein konkretes Problem aufstellen können**. Der Euler-Lagrange-Gleichung werden wir nicht nur in der Mechanik begegnen, sondern in allen Gebieten der theoretischen Physik. Schauen wir uns zuerst die Motivation für diese Gleichung an.

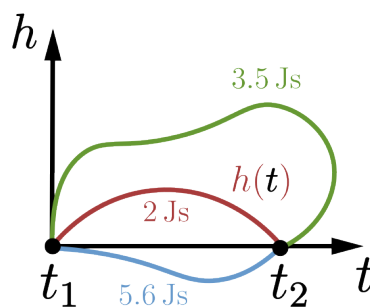
Betrachten wir ein **Teilchen im Gravitationsfeld**, das von der Höhe  $h(t_1) = 0$  zum Zeitpunkt  $t_1 = 0$  senkrecht nach oben geworfen wird. In dem nachfolgenden Bild als Punkt A markiert. Es bewegt sich gerade entlang einer Raumrichtung und kommt zum Zeitpunkt  $t_2$  am Boden am selben Ort  $h(t_2) = h(t_1) = 0$  an (im Bild als Punkt B markiert):



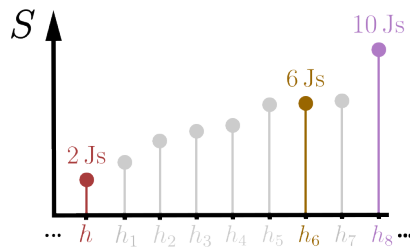
Die **Verbindung zwischen A und B**, also die Trajektori  $h(t)$  muss bei diesem Problem eine **Parabel** sein. Doch **warum** ist diese Trajektorie eine Parabel und nicht irgendein anderer Verlauf? Warum entscheidet sich die Natur oder das Teilchen zwischen den Punkten A und B ausgerechnet für diesen Weg? Und nicht für irgendeinen anderen Weg?

Um diese Frage beantworten zu können, brauchen wir eine physikalische Größe, die **Wirkung** genannt wird, mit einem  $S$  abgekürzt wird und die Einheit Js (Joulesekunde) hat.

Wir können jedem der denkbaren Trajektorien  $h$  eine Wirkung  $S[h]$  zuordnen. Die Wirkung nimmt eine ganze Funktion  $h$  im Argument und gibt eine Zahl  $S[h]$  aus, nämlich den Wert der Wirkung für die entsprechende Funktion. Zum Beispiel könnte irgendein Weg  $h_1$  den Wert  $S[h_1] = 3.5 \text{ Js}$  haben, ein anderer Weg  $h_2$  den Wert  $S[h_2] = 5.6 \text{ Js}$  und der Parabelweg  $h$  könnte den Wert  $S[h] = 2 \text{ Js}$  haben:



So jetzt nochmal zurück zu der Frage: **Warum ausgerechnet eine Parabel?** Die Erfahrung zeigt, dass die Natur das **Prinzip der extremalen Wirkung** befolgt. Das heißt, wenn wir für alle möglichen Wege  $h(t)$ ,  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$  und so weiter zwischen den Punkten A und B die dazugehörige Wirkung  $S$  ausrechnen, dann nimmt die Natur den Wert der Wirkung an, der **maximal, minimal oder ein Sattelpunkt** ist.



Alle anderen Wirkungen kommen von der Natur nicht in Frage. Für einen dieser extremalen Punkte entscheidet sich die Natur. Genau das bedeutet »extremal«. Welchen der extremalen Wege (Minimum, Maximum, Sattelpunkt) die Natur konkret nimmt, hängt von dem betrachteten Problem ab.

Wir können also die Frage beantworten: Warum nimmt das im Gravitationsfeld nach oben geworfene Teilchen den Weg der Parabel im Ort-Zeit-Diagramm? Weil der parabelförmige Weg  $h$  die kleinste Wirkung  $S[h]$  hat!

Doch **wie berechnen wir konkret den Wert der Wirkung?** Dazu brauchen wir die **Lagrange-Funktion**  $L(t, h, \dot{h})$ . Sie hängt von der Zeit  $t$ , von dem Funktionswert (Position)  $h(t)$  und von der Zeitableitung (Geschwindigkeit)  $\dot{h}(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  ab. Die Lagrange-Funktion hat die Einheit der Energie, also Joule (J).

Wenn wir die Lagrange-Funktion  $L$  über die Zeit  $t$  zwischen  $t_1$  und  $t_2$  integrieren, bekommen wir eine Größe, die die Einheit Joulesekunde hat. Das interpretieren wir als die Wirkung  $S$ , die wir konkret zu berechnen versuchen:

$$S[h] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t, h, \dot{h}) \quad (9.1)$$

Meistens verwendet man den Buchstaben  $q$  statt  $h$  und  $\dot{q}$  statt  $\dot{h}$  und nennt  $q$  **generalisierte Koordinate** und die Ableitung  $\dot{q}$  **generalisierte Geschwindigkeit**. Die generalisierte Koordinate (die gesuchte Trajektorie) muss nämlich nicht unbedingt die Höhe  $h$  über dem Erdboden sein. Sie kann zum Beispiel einen Winkel  $q = \varphi$  oder irgendeine andere Größe repräsentieren, die von der Zeit  $t$  abhängen kann.

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t, q, \dot{q}) \quad (9.2)$$

Mit dieser **Formel für das Wirkungsfunktional** können wir konkret den Wert  $S[q]$  der Wirkung für jede mögliche Trajektorie  $q$  berechnen, die das Teilchen nehmen kann. Wir müssen nur die Lagrange-Funktion  $L$  konkret kennen.

Es gibt doch unendlich viele mögliche Trajektorien, die ein Teilchen von A nach B nehmen kann. Muss ich wirklich unendlich viele Wirkungsfunktionale 9.2 berechnen? Nein, es gibt eine schnellere Möglichkeit die Trajektorie mit der extremalsten Wirkung herauszufinden und dazu brauchen wir die Euler-Lagrange-Gleichung.

# 10. Euler-Lagrange-Gleichung

Es ist natürlich total umständlich das Wirkungsfunktional 9.2 für alle möglichen Wege auszurechnen und den Weg zu nehmen, der den kleinsten Wert des Integrals ergibt. Um uns diese riesige Aufgabe zu ersparen, kommt die **Euler-Lagrange-Gleichung** ins Spiel:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (10.1)$$

Das ist eine der **wichtigsten Gleichungen der Physik**. Merke sie dir am besten sofort. Die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung basiert auf der Definition des Wirkungsfunktional 9.2 und dem Prinzip der extremalen Wirkung. In diesem Kapitel wollen wir nicht wissen, wie man auf die Euler-Lagrange-Gleichung kommt, sondern, wie man mit ihr konkret den gesuchten extremalen Weg  $h$  bestimmt.

Die Euler-Lagrange-Gleichung 10.1 enthält die partielle Ableitung  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  der Lagrange-Funktion nach der generalisierten Geschwindigkeit  $\dot{q}$ . Diese Ableitung wird auch als **generalisierter Impuls** bezeichnet und mit  $p$  abgekürzt. Es kann also sein, dass du der Euler-Lagrange-Gleichung auch in

der folgenden Form begegnest:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{dp}{dt} = 0 \quad (10.2)$$

Wir nennen  $p$  »generalisierten Impuls«, weil dieser **nicht unbedingt der mechanische Impuls** sein muss.  $p$  kann beispielsweise auch ein **Drehmoment** repräsentieren. Der generalisierte Impuls  $p$  wird in der Euler-Lagrange-Gleichung anschließend nach der Zeit  $t$  abgeleitet.

Wenn wir die Euler-Lagrange-Gleichung 10.2 nach der Zeitableitung des Impulses umformen, können wir daraus ablesen, ob der Impuls erhalten ist:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (10.3)$$

Damit der Impuls erhalten ist, muss die Zeitableitung des Impulses verschwinden. Wir müssen also nur ausrechnen, ob  $\frac{\partial L}{\partial q}$  Null ergibt, dann ist der generalisierte Impuls erhalten.

Anhand der Form 10.3 können wir auch die **eine mögliche Interpretation der Euler-Lagrange-Gleichung** ablesen. Sie ist eine **Bedingung für die Impulserhaltung**.

Damit wir die Euler-Lagrange-Gleichung überhaupt benutzen können, müssen wir die Lagrange-Funktion  $L$  für ein gewähltes System kennen.

## 10.1 Lagrange-Funktion

Die Lagrange-Funktion  $L$  ist eine skalare Funktion, die für ein beliebiges Problem nicht hergeleitet werden kann, sondern **kann nur erraten oder motiviert** werden. Wenn du denkst, du hast eine passende Lagrange-Funktion für ein Problem entdeckt, sei es aus der Quantenmechanik, aus der klassischen Mechanik oder aus der Relativitätstheorie, dann kannst du mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung leicht überprüfen, ob die gefundene



Lagrange-Funktion dein Problem richtig beschreibt oder nicht. Wenn du die »Weltformel« finden willst, die die Quantenmechanik mit der allgemeinen Relativitätstheorie vereint, dann solltest du die dazugehörige Lagrange-Funktion herleiten oder erträumen.

In der **klassischen Mechanik** ist die Lagrange-Funktion die **Differenz zwischen der kinetischen Energie  $W_{\text{kin}}$  und der potentiellen Energie  $W_{\text{pot}}$**  eines Teilchens:

$$L(t, q, \dot{q}) = W_{\text{kin}}(t, q, \dot{q}) - W_{\text{pot}}(t, q, \dot{q}) \quad (10.4)$$

Wenn wir also die kinetische und die potentielle Energie eines Teilchens kennen, können wir daraus die Lagrange-Funktion 10.4 der Mechanik bestimmen und diese dann in der Euler-Lagrange-Gleichung 10.1 nutzen.

## 10.2 How To: Euler-Lagrange-Gleichung

Schauen wir anhand unseres Beispiels in der Einleitung an, nämlich wie wir die Parabel mithilfe der Lagrange-Funktion 10.4 und der Euler-Lagrange-Gleichung 10.1 berechnen können. Dazu müssen wir immer folgende fünf Schritte durchführen:

### 10.2.1 Erster Schritt: Generalisierte Koordinaten festlegen

Als erstes müssen wir wissen, was  $q$  und  $\dot{q}$  konkret repräsentieren. In unserem Beispiel ist  $q = h$  und  $\dot{q} = v$ , wobei  $v$  die Geschwindigkeit des geworfenen Teilchens ist. Geschwindigkeit ist nichts anderes als die Zeitableitung der Wegfunktion, also  $v = \dot{h}$ .

### 10.2.2 Zweiter Schritt: Lagrange-Funktion aufstellen

Als nächstes müssen wir die Lagrange-Funktion 10.4 angeben, indem wir die kinetische Energie  $W_{\text{kin}}$  und die potentielle Energie  $W_{\text{pot}}$  des Teilchens im Gravitationsfeld in Abhängigkeit von  $q$  und  $\dot{h}$  angeben. Die kinetische Energie

$W_{\text{kin}}$  des geworfenen Teilchens ist gegeben durch:

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \dot{h}^2 \quad (10.5)$$

Hierbei ist  $m$  die Masse des Teilchens. Die potentielle Energie  $W_{\text{pot}}$  des Teilchens im Gravitationsfeld ist gegeben durch:

$$W_{\text{pot}} = m g h \quad (10.6)$$

Damit lautet die Lagrange-Funktion  $L$  für unser Problem:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - m g h \quad (10.7)$$

### 10.2.3 Dritter Schritt: Ableitungen berechnen

Nun können wir die aufgestellte Lagrange-Funktion 10.7 benutzen, um die in der Euler-Lagrange-Gleichung 10.1 vorkommenden Ableitungen der Lagrange-Funktion auszurechnen:

$$\frac{\partial L}{\partial h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = 0 \quad (10.8)$$

Leite die Lagrange-Funktion 10.7 nach  $h$  ab:

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \frac{\partial L}{\partial h} \left( \frac{1}{2} m v^2 - m g h \right) \quad (10.9)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial h} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) - \frac{\partial L}{\partial h} (m g h) \quad (10.10)$$

$$= -m g \quad (10.11)$$

Leite die Lagrange-Funktion 10.7 nach  $v$  ab:

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial v} \left( \frac{1}{2} m v^2 - m g h \right) \quad (10.12)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial v} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) - \frac{\partial L}{\partial v} (m g h) \quad (10.13)$$

$$= m v \quad (10.14)$$

Den berechneten Impuls  $p = \frac{\partial L}{\partial v}$  nach der Zeit ableiten:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m v) \quad (10.15)$$

$$= m \dot{v} \quad (10.16)$$

$$= m \ddot{h} \quad (10.17)$$

Setzen wir die berechneten Ableitungen 10.11 und 10.14 in die Euler-Lagrange-Gleichung ein:

$$-m g - m \ddot{h} = 0 \quad (10.18)$$

Kürzen wir die Masse und bringen  $\ddot{h}$  auf die rechte Seite der Gleichung:

$$-g = \ddot{h} \quad (10.19)$$

Was wir in 10.19 herausbekommen haben, ist eine Differentialgleichung für die gesuchte Wegfunktion  $h(t)$ . Hier siehst du hoffentlich den Nutzen der Euler-Lagrange-Gleichung: Sie ist dafür da, **um Differentialgleichungen für den extremalen Weg  $h(t)$  aufzustellen**.

Beachte, dass unser Beispiel ein **eindimensionales Problem** ist und wir daher nur **eine Differentialgleichung** herausbekommen haben. Bei komplexeren mehrdimensionalen Problemen bekommen wir mehrere Differentialgleichungen heraus.

## 10.2.4 Vierter Schritt: Aufgestellte Differentialgleichungen lösen

Jetzt müssen wir die mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung aufgestellte Differentialgleichung 10.19 lösen. Das können wir machen, indem wir beide Seiten zwei Mal integrieren. Die Lösung ist der gesuchte extremale Weg:

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2 \quad (10.20)$$

Hierbei sind  $C_1$  und  $C_2$  die Integrationskonstanten.

## 10.2.5 Fünfter Schritt: Randbedingungen einsetzen

Als letzten Schritt müssen wir die Nebenbedingungen des betrachteten Problems in die Lösung der Differentialgleichung einsetzen und die unbekanntenen Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  bestimmen.

In unserem Problem haben wir das Teilchen zum Zeitpunkt  $t_1 = 0$  von der Höhe  $h_1 = 0$  abgeworfen. Die erste Randbedingung lautet also:  $h(0) = 0$ . Wenn wir sie in die Lösung 10.20 einsetzen, bekommen wir die zweite Integrationskonstante heraus:  $C_2 = 0$ . Damit vereinfacht sich die Lösung:

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t \quad (10.21)$$

Wir wissen, dass die Trajektorie  $h(t)$  im Punkt B endet. Der Punkt B entspricht dem Zeitpunkt  $t_2$  zu dem das Teilchen am Boden bei  $h(t_2) = 0$  gelandet ist. Das ist die zweite Nebenbedingung. Setzen wir diese Randbedingung in 10.21 ein, können wir die erste Integrationskonstante bestimmen:  $C_1 = \frac{1}{2}gt_2$ . Wir sind fertig!

Damit ist der gesuchte extremale Weg gegeben durch:

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + \frac{1}{2}gt_2 t \quad (10.22)$$

Dieser Weg hat den kleinsten Wert  $S[h]$  der Wirkung. Wenn wir das Ergebnis

10.22 im Ort-Zeit-Diagramm plotten, bekommen wir eine Parabel.

Fassen wir zusammen: **Die Euler-Lagrange-Gleichung hilft uns Differentialgleichungen für eine gesuchte Trajektorie zwischen zwei festen Punkten aufzustellen.** Die Lösung dieser Differentialgleichungen ergibt den genauen Verlauf der Trajektorie, der von der Natur erlaubt ist.





# Elektromagnetismus

**11** Elektrisches Vektorfeld ..... 111

**12** Magnetisches Vektorfeld ..... 115





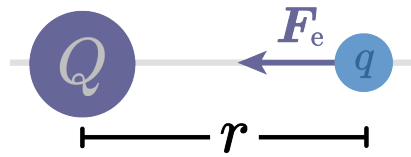
# 11. Elektrisches Vektorfeld

**Mehr:** [de.fufaev.org/elektrisches-vektorfeld](http://de.fufaev.org/elektrisches-vektorfeld)

Betrachte eine elektrisch geladene Kugel mit der großen **Quellladung**  $Q$  und eine Kugel mit der kleinen **Probeladung**  $q$ . Die Probeladung befindet sich zu einem bestimmten Zeitpunkt im **Abstand**  $r$  zur Quellladung. Die Quellladung übt eine **elektrische Kraft**  $F_e$  auf die Probeladung aus, die durch das **Coulomb-Gesetz** gegeben ist:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \tag{11.1}$$

Hierbei ist  $4\pi\epsilon_0$  ein konstanter Vorfaktor mit der elektrischen Feldkonstanten  $\epsilon_0$ , die für die richtige Einheit der Kraft auf der rechten Seite des Coulomb-Gesetzes sorgt, nämlich für die Einheit Newton (N).



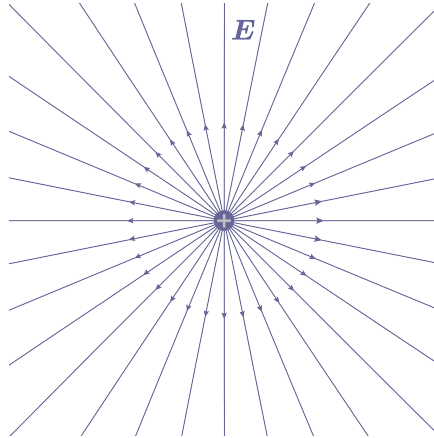
Was ist nun, wenn wir den Wert der großen Ladung  $Q$  kennen und wissen möchten, welche Kraft diese große Ladung auf eine andere kleine Ladung  $q$  ausübt? Wir kennen aber nicht den genauen Wert dieser kleinen Ladung. Oder wir lassen diesen Wert mit Absicht offenstehen und möchten nur die elektrische Kraft betrachten, die von der großen Kugel ausgeübt werden würde, wenn wir die Probeladung  $q$  in ihre Nähe platzieren. Dazu muss  $q$  irgendwie aus dem Coulomb-Gesetz eliminiert werden. Das erreichen, indem wir das Coulomb-Gesetz auf beiden Seiten durch  $q$  dividieren, sodass die Probeladung auf der rechten Seite verschwindet:

$$\frac{F_e}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (11.2)$$

Der Quotient zwischen Kraft und Ladung auf der linken Seite wird als **elektrisches Feld**  $E$  der Quellladung  $Q$  definiert:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (11.3)$$

Was ist also das elektrische Feld? **Das elektrische Feld  $E$  gibt die elektrische Kraft an, die auf eine Probeladung  $q$  wirken WÜRDEN, wenn sie im Abstand  $r$  zur Quellladung  $Q$  platziert wird.**



Wir haben die große Ladung  $Q$  als Quellladung bezeichnet, um anzudeuten, dass sie die **Quelle des elektrischen Feldes** ist. Und damit  $Q$  wirklich die einzige Quelle ist, haben wir die Probeladung  $q$  **klein** gewählt.

Das elektrische Feld in Gl. 11.3 ist nur der **Betrag**, also der Wert des elektrischen Feldes. Für das Sahnehäubchen der Elektrodynamik, die Maxwell-Gleichungen, brauchen wir das elektrische Feld als eine Vektorgröße, um auch die Richtung des elektrischen Feldes an allen Orten im Raum zu berücksichtigen. Deshalb muss das elektrische Feld  $E$  in einen Vektor  $\mathbf{E}$  verwandelt werden. Vektoren werden in diesem Buch **in fett** dargestellt.

Das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  als Vektor im dreidimensionalen Raum hat drei Komponenten  $E_1, E_2$  und  $E_3$ .

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

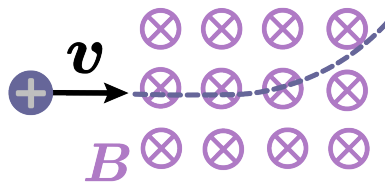
Die erste Komponente  $E_1(x, y, z)$  hängt von den Raumkoordinaten  $(x, y, z)$  ab und sie gibt den Anteil der elektrischen Kraft, der auf eine Probeladung entlang der  $x$ -Achse wirken würde, wenn die Probeladung am Ort  $(x, y, z)$  platziert wird. Analog gilt es für die beiden anderen Feldkomponenten  $E_2(x, y, z)$  und  $E_3(x, y, z)$ , die jeweils die elektrische Kraft auf eine Probeladung entlang der  $y$ -

und  $z$ -Raumrichtung bestimmen.

Wir können zusammenfassen: Das elektrische Vektorfeld  $\mathbf{E}$  weist jedem Raumpunkt  $(x, y, z)$  einen Vektor  $\mathbf{E}(x, y, z)$  zu, der das elektrische Feld an diesem Ort repräsentiert. Wird dort eine Probeladung platziert, dann wird sie in Richtung dieses Vektors beschleunigt.

## 12. Magnetisches Vektorfeld

Eine weitere wichtige fundamentale physikalische Größe, die in der zweiten und vierten Maxwell-Gleichung vorkommt, ist das **magnetische Feld**. Experimentell wird festgestellt, dass ein Teilchen mit der **elektrischen Ladung**  $q$ , das sich mit der **Geschwindigkeit**  $v$  in einem externen Magnetfeld geradlinig bewegt, eine **magnetische Kraft**  $F_m$  erfährt, die das Teilchen von seiner geradlinigen Bahn ablenkt.



Dabei nimmt die magnetische Kraft auf das Teilchen proportional zu seiner Ladung  $F_m \sim q$  und proportional zu seiner Geschwindigkeit  $F_m \sim v$  zu. Das heißt: Wird die Ladung oder die Geschwindigkeit verdoppelt, dann verdoppelt sich auch die magnetische Kraft auf das Teilchen.

Die Kraft nimmt auch proportional zum angelegten Magnetfeld zu. Um diese

Proportionalität der Kraft und des Magnetfelds zu beschreiben, führen wir die Größe  $B$  ein. Insgesamt ist die magnetische Kraft (auch **Lorentzkraft** genannt) gegeben durch:

$$F_m = qvB \quad (12.1)$$

Die Einheit der Größe  $B$  muss so sein, dass die rechte Seite der Gleichung die Einheit der Kraft ergibt, also  $N = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ . Durch eine einfache Umformung ergibt sich die Einheit von  $B$  zu:  $\text{kg}/\text{As}^2$ . Diese Einheit bezeichnen wir kurz als **Tesla**:

$$T = \frac{\text{kg}}{\text{As}^2} \quad (12.2)$$

Wir bezeichnen die Proportionalitätskonstante  $B$  als **magnetische Flussdichte** oder kurz: **Magnetfeld** oder noch kürzer  **$B$ -Feld**. Hauptsachen wir wissen, dass damit die magnetische Flussdichte gemeint ist.

Die Gleichung 12.1 stellt nur den **Betrag** der magnetischen Kraft  $F_m$  dar. Um die magnetische Kraft **vektoriell** zu formulieren, werden die Kraft, die Geschwindigkeit und das Magnetfeld als Vektoren geschrieben:

$$\mathbf{F}_m = \begin{bmatrix} F_{m1} \\ F_{m2} \\ F_{m3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

Jetzt sind die drei Größen keine Skalare, sondern dreidimensionale Vektoren mit den Komponenten in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Raumrichtung. Die Frage ist jetzt: **Wie muss der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  mit dem magnetischen Vektorfeld  $\mathbf{B}$  vektoriell multipliziert werden?**

Wenn die Ablenkung der Ladung im Magnetfeld in einem Experiment genauer betrachtet wird, dann kann festgestellt werden, dass die magnetische Kraft

stets **orthogonal**, also senkrecht zur Geschwindigkeitsrichtung und zu den magnetischen Feldlinien abgelenkt wird. Diese Orthogonalität kann leicht mit dem **Kreuzprodukt**  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  berücksichtigt werden.

Das Kreuzprodukt zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und dem Magnetfeldvektor ist so definiert, dass das Ergebnis des Kreuzprodukts, welches ein Vektor ist, immer **orthogonal** auf den beiden Vektoren  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{B}$  steht:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 B_3 - v_3 B_2 \\ v_3 B_1 - v_1 B_3 \\ v_1 B_2 - v_2 B_1 \end{bmatrix} \quad (12.4)$$

Damit also die magnetische Kraft  $\mathbf{F}_m$  stets orthogonal auf  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{B}$  steht, muss deren Kreuzprodukt gebildet werden. Also ist die magnetische Kraft als Vektorfeld gegeben durch:

$$\mathbf{F}_m = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (12.5)$$

Was ist also das magnetische Vektorfeld  $\mathbf{B}$ ? **Das magnetische Vektorfeld weist jedem Raumpunkt  $(x, y, z)$  einen Vektor  $\mathbf{B}(x, y, z)$  zu, der die Größe und Richtung der magnetischen Kraft  $\mathbf{F}_m(x, y, z)$  auf eine bewegte Ladung  $q$  festlegt.**





# 13. Maxwell-Gleichungen im Vakuum

**Mehr:** [de.fufaev.org/maxwell-gleichungen](http://de.fufaev.org/maxwell-gleichungen)

Die **vier Maxwell-Gleichungen** beinhalten zusammen mit der **Lorentzkraft** das **gesamte Wissen der Elektrodynamik**. Von dieser gibt es so viele Anwendungen, dass ich sie gar nicht alle aufzählen kann, aber einige davon sind zum Beispiel:

- **Elektronische Geräte** wie Computer und Handys. In denen stecken nämlich elektrische Kondensatoren, Spulen und insgesamt ganze Stromschaltkreise, die die MaxwellGleichungen ausnutzen.
- **Stromerzeugung** - egal ob aus Kern-, Wind- oder Wasserkraftwerken, die freigesetzte Energie muss zuerst in elektrische Energie umgewandelt werden, damit die Menschen diese nutzen können. Das passiert mit elektrischen Generatoren. Diese basieren wiederum auf den Maxwell-Gleichungen.
- **Stromversorgung** der Menschheit. Um elektrischen Strom mit möglichst geringem Energieverlust in die Haushalte zu transportieren, werden Wechselspannungen und Transformatoren benötigt.

- **Und vieles mehr!** Elektroschweißen zum Zusammenbauen der Autokarosserien, Motoren für Elektroautos Magnetresonanztomographie in der Medizin, Wasserkocher in der Küche, das Ladegerät von deinem Handy, Radio, WLAN und so weiter.

Ist das nicht unglaublich? Jedes Gerät, welches Elektrizität oder Magnetismus ausnutzt, basiert fundamental auf den Maxwell-Gleichungen. Hier, lass sie mal auf dich wirken:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Noch erscheinen sie dir vielleicht etwas kryptisch, aber nach dieser Lektion wirst du jede dieser vier Gleichungen in ein Bild übersetzen können, was sich leichter verinnerlichen lässt.

Wie du an den Maxwell-Gleichungen siehst, kommen dort das **elektrische Feld**  $\mathbf{E}$  und das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  vor. Die beiden Größen hast du hoffentlich in den Kapiteln 11 und 12 kennengelernt. Ich setzte natürlich auch voraus, dass du das Kapitel 5 über den Nabla-Operator, den Stokes-Integralsatz 7 und den Gauß-Integralsatz 6 gelesen hast. Wenn das der Fall ist, dann wirst du kein Problem haben, die nachfolgenden Kapitel zu verstehen.

## 13.1 Integrale und differentielle Darstellungsform

Die vier Maxwell-Gleichungen lassen sich auf zwei unterschiedliche Weisen darstellen:

- Wir können Maxwell-Gleichungen in **integraler Form** darstellen. Hier drücken wir sie mit Integralen aus. Damit können wir die

Maxwell-Gleichungen **makroskopisch** verstehen. So sieht die integrale Darstellungsform aus. Lasse sie kurz auf dich einwirken:

$$\begin{aligned}\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} &= 0 \\ \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \\ \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \int_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}\end{aligned}$$

Welche Gefühle erzeugen diese Gleichungen bei dir? Vielleicht Angst? Vertrau mir - bald nicht mehr!

- Wir können Maxwell-Gleichungen in **differentieller Form** darstellen. Hier drücken wir sie mit Ortsableitungen aus. Damit können wir die Maxwell-Gleichungen **mikroskopisch** verstehen. So sieht die differentielle Darstellungsform aus:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Was ist der genaue Unterschied dieser beiden Formen? Beide Darstellungsformen **unterscheiden sich physikalisch nicht**, mathematisch jedoch schon. Und sie sind für unterschiedliche Probleme unterschiedlich nützlich:

- Während die differentielle Form einer Maxwell-Gleichung **für einen einzelnen Punkt** im Raum gilt, gilt die integrale Form für einen **ganzen Raumbereich**.
- Die integrale Form eignet sich gut zur Berechnung **von symmetrischen**

**Problemen**, wie die Berechnung des elektrischen Feldes einer geladenen Kugel, eines geladenen Zylinders oder einer geladenen Ebene. Die differentielle Form eignet sich eher zur Berechnung **komplizierter numerischer Probleme** mithilfe von Computern oder **für verschiedene Herleitungen**, wie beispielsweise zur Herleitung der elektromagnetischen Wellen.

- Außerdem ist die differentielle Darstellungsform **viel kompakter** als die integrale Form.

Beide Darstellungsformen sind nützlich und lassen sich **mithilfe zweier mathematischer Integralsätze (Gauß und Stokes) ineinander umwandeln**, die du in den Kapiteln 6 und 7 kennengelernt hast. Wenn du die beiden Integralsätze verstanden hast, wird es dir einfach fallen, die integrale Form in die differentielle Form umzuwandeln und andersherum.

Für das Verständnis der Maxwell-Gleichungen ist es hilfreich den elektrischen und magnetischen Fluss und die Spannung zu verstehen.

## 13.2 Elektrischer und magnetischer Fluss

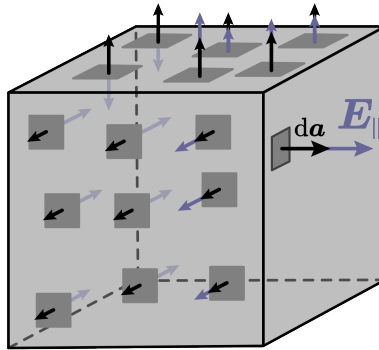
Im Kapitel 6 über den Gauß-Integralsatz hast du den **Fluss  $\Phi$  eines Vektorfeldes  $\mathbf{F}$  durch die Fläche  $A$**  kennengelernt (das Kreis am Integralzeichen brauchen wir nicht, um den Fluss zu definieren):

$$\Phi = \int_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \quad (13.1)$$

Das Flächenintegral über das Vektorfeld  $\mathbf{F}$  ergibt eine Zahl  $\Phi$ , die angibt, wieviel von dem Vektorfeld  $\mathbf{F}$  die Fläche  $A$  durchtritt.

Wenn das Vektorfeld  $\mathbf{F}$  im Flächenintegral ein **elektrisches Feld  $\mathbf{F} = \mathbf{E}$**  ist, dann wird dieses Flächenintegral als **elektrischer Fluss  $\Phi_e$  durch die Fläche  $A$**  bezeichnet:

$$\Phi_e = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (13.2)$$



Wenn das Vektorfeld  $\mathbf{F}$  im Flächenintegral dagegen ein **magnetisches Feld**  $\mathbf{F} = \mathbf{B}$  ist, dann wird dieses Flächenintegral als **magnetischer Fluss**  $\Phi_m$  **durch die Fläche**  $A$  bezeichnet:

$$\Phi_m = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (13.3)$$

## 13.3 Elektrische und magnetische Spannung

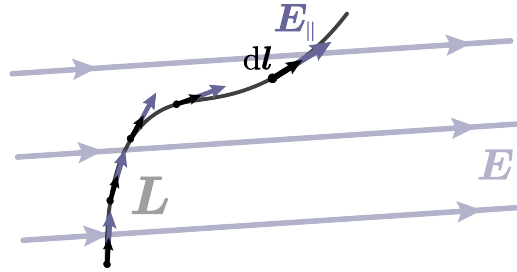
Im Kapitel 7 über den Stokes-Integralsatz haben wir das folgende Linienintegral über das Vektorfeld  $\mathbf{F}$  mit  $U$  bezeichnet:

$$U = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (13.4)$$

Die Zahl  $U$  gibt an, wie viel von dem Vektorfeld entlang der Linie  $L$  zirkuliert. Die Bezeichnung war kein Zufall, dass wir es mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet haben, wie die Spannung.

Wenn das Vektorfeld  $\mathbf{F}$  im Linienintegral ein **elektrisches Feld**  $\mathbf{F} = \mathbf{E}$  ist, dann wird dieses Linienintegral als **elektrische Spannung**  $U_e$  **entlang der Linie**  $L$  bezeichnet:

$$U_e = \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (13.5)$$



Die Spannung 13.5 im Fall von einem elektrischen Feld ist **proportional zur kinetischen Energie**:

- Ein **positiv geladenes Teilchen gewinnt Energie**, wenn es die Linie  $L$  durchläuft.
- Ein **negativ geladenes Teilchen verliert Energie**, wenn es die Linie  $L$  durchläuft.

Das Linienintegral 13.5 des elektrischen Feldes, also die Spannung  $U_e$ , **misst den kinetischen Energiegewinn oder Energieverlust** von einem geladenen Teilchen, wenn es die betrachtete Linie  $L$  im elektrischen Feld durchläuft. Beachte jedoch, dass diese kinetische Energie nicht aus dem Nichts kommt, sondern **dem elektrischen Feld entzogen oder zugeführt** wird.

Wenn das Vektorfeld  $\mathbf{F}$  im Linienintegral ein **magnetisches Feld  $\mathbf{F} = \mathbf{B}$**  ist, dann wird dieses Linienintegral als **magnetische Spannung  $U_m$  entlang der Linie  $L$**  bezeichnet:

$$U_m = \int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (13.6)$$

Die magnetische Spannung hat im Gegensatz zur elektrischen Spannung keine Interpretation als Energie, denn hier ändert das Teilchen seine Energie nicht, wenn es die Linie  $L$  durchläuft. Magnetische Felder verrichten keine Arbeit an bewegten Ladungen. Dennoch ist die analoge Definition zur elektrischen Spannung mathematisch sinnvoll.

Dieses Wissen über den elektrischen und magnetischen Fluss sowie die

Spannung, werden wir gleich brauchen, wenn wir die Maxwell-Gleichungen in Integralform anschaulich verstehen wollen.

## 13.4 Die erste Maxwell-Gleichung

### 13.4.1 Makroskopische Darstellung

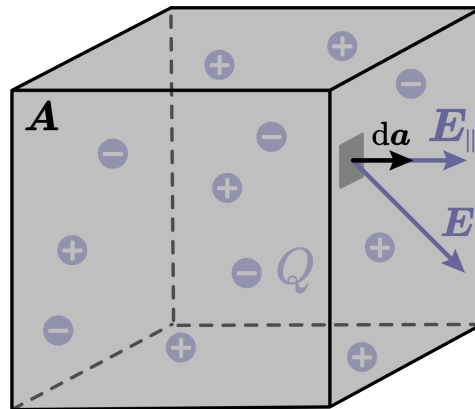
Schauen wir uns die erste Maxwell-Gleichung in Integralform an:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (13.7)$$

Die linke Seite der Maxwell-Gleichung 13.7 sollte dir bekannt vorkommen. Es ist der **elektrische Fluss**  $\Phi_e$  durch eine gedachte Oberfläche  $A$ , die irgendetwas einschließt. Die linke Seite der Maxwell-Gleichung sagt also aus, wie viel netto von dem **elektrischen Feld**  $\mathbf{E}$  aus der Oberfläche  $A$  austritt und hineintritt:

$$\Phi_e = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (13.8)$$

Auf der rechten Seite der ersten Maxwell-Gleichung steht die **gesamte elektrische Ladung**  $Q$ , die von der Oberfläche  $A$  eingeschlossen wird. Die **elektrische Feldkonstante**  $\epsilon_0$  ist nur dafür da, um auf beiden Seiten der Maxwell-Gleichung die richtige Einheit »Voltmeter« zu haben. Das Interessante ist: Es ist völlig egal, **wie** diese eingeschlossene Ladung verteilt ist.



Was sagt also die erste Maxwell-Gleichung in Integralform aus? Der elektrische Fluss durch eine Oberfläche wird bestimmt durch die elektrische Ladung, die von dieser Oberfläche eingeschlossen ist.

### 13.4.2 Mikroskopische Darstellung

Das ist die **makroskopische Interpretation** der ersten Maxwell-Gleichung. Für eine **mikroskopische** Interpretation müssen wir die **Integralform in eine differentielle Form umwandeln**. Wie machen wir das? Wir müssen beide Seiten der Maxwell-Gleichung 13.7 zuerst in ein Volumenintegral umwandeln.

Mit dem Gauß-Integralsatz 6.1, der ein Volumenintegral mit einem Flächenintegral verknüpft, kann das Flächenintegral auf der linken Seite der ersten Maxwell-Gleichung in ein Volumenintegral umgeschrieben werden:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) \, dv = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (13.9)$$

Die eingeschlossene Ladung  $Q$  lässt sich ebenfalls mit einem Volumenintegral ausdrücken. Die Ladung entspricht nämlich der **Ladungsdichte**  $\rho$  über das betrachtete Volumen  $V$ , denn Ladungsdichte ist definitionsgemäß **Ladung pro Volumen**. Das heißt, dass das Volumenintegral der Ladungsdichte  $\rho$  über ein Volumen  $V$  der Ladung entspricht, die in diesem Volumen eingeschlossen ist. Damit verwandelt sich die rechte Seite der ersten Maxwell-Gleichung 13.9 in ein



Volumenintegral:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) \, dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dv \quad (13.10)$$

Auf beiden Seiten in Gl. 13.10 wird **über das gleiche Volumen  $V$  integriert**. Damit diese Gleichung für beliebig gewählte Volumina immer erfüllt ist, müssen die Integranden auf beiden Seiten gleich sein (wobei der rechte Integrand noch mit der Konstante  $\frac{1}{\varepsilon_0}$  multipliziert ist). Daraus ergibt sich die **differentielle Form der ersten Maxwell-Gleichung**:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (13.11)$$

Auf der linken Seite der differentiellen Darstellungsform steht die **Divergenz  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  des elektrischen Feldes**. Die Divergenz am Ort  $(x, y, z)$  kann positiv, negativ oder Null sein. Was das genau zu bedeuten hat, haben wir im Kapitel 5.2 kennengelernt:

- Wenn die **Divergenz  $\nabla \cdot \mathbf{E}(x, y, z) > 0$**  am Ort  $(x, y, z)$  **positiv** ist, dann ist auch die **Ladungsdichte  $\rho(x, y, z)$**  am Ort  $(x, y, z)$  **positiv**. Am Ort  $(x, y, z)$  befindet sich also eine **positive elektrische Ladung**, die die **Quelle des elektrischen Feldes** ist.
- Wenn die **Divergenz  $\nabla \cdot \mathbf{E}(x, y, z) < 0$**  am Ort  $(x, y, z)$  **negativ** ist, dann ist auch die **Ladungsdichte  $\rho(x, y, z)$**  am Ort  $(x, y, z)$  **negativ**. Am Ort  $(x, y, z)$  befindet sich also eine **negative elektrische Ladung**, die die **Senke des elektrischen Feldes** ist.
- Wenn die **Divergenz  $\nabla \cdot \mathbf{E}(x, y, z) = 0$**  am Ort  $(x, y, z)$  **Null** ist, dann ist auch die **Ladungsdichte  $\rho(x, y, z)$**  am Ort  $(x, y, z)$  **Null**. Am Ort  $(x, y, z)$  befindet sich also **weder eine negative noch eine positive elektrische Ladung** oder dort befindet sich genauso viel positive wie negative Ladung, sodass sich die Gesamtladung in diesem Punkt  $(x, y, z)$  weghebt. In diesem Fall sitzt an diesem Ort ein **idealer elektrischer Dipol**.

Was sagt also die erste Maxwell-Gleichung in Differentialform aus? **Die**

elektrischen Ladungen sind die Quellen und Senken des elektrischen Feldes. Ladungen erzeugen elektrische Felder!

## 13.5 Die zweite Maxwell-Gleichung

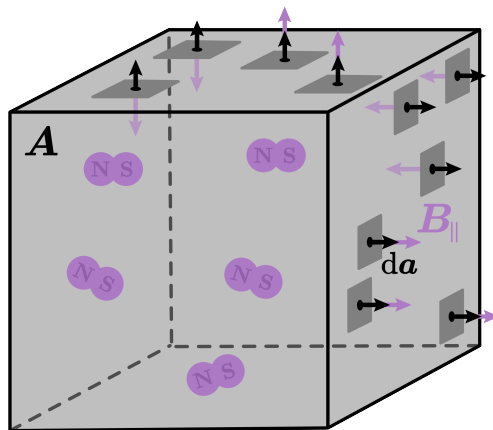
### 13.5.1 Makroskopische Darstellung

Die zweite Maxwell-Gleichung in Integralform sieht folgendermaßen aus:

$$\oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (13.12)$$

Es sollte dir hier nichts mehr unbekannt vorkommen. Auf der linken Seite steht ein Flächenintegral. Es wird hier jedoch nicht, wie bei der ersten Maxwell-Gleichung, über ein elektrisches Vektorfeld integriert, sondern über ein **magnetisches Vektorfeld  $\mathbf{B}$** . Dieses Flächenintegral entspricht dem **magnetischen Fluss  $\Phi_m$**  durch die geschlossene Oberfläche  $A$ .

Was sagt also die zweite Maxwell-Gleichung in Integralform aus makroskopischer Sicht aus? **Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist stets Null.** Es zeigen genauso viele magnetische Feldvektoren in die Oberfläche hinein wie hinaus.



### 13.5.2 Mikroskopische Darstellung

Um die **differentielle Form** der zweiten Maxwell-Gleichung zu bekommen, müssen wir das Flächenintegral in in der zweiten Maxwell-Gleichung 13.12 **in ein Volumenintegral umwandeln**. Dazu ersetzen wir einfach das Flächenintegral mit dem Volumenintegral aus dem Gauß-Integralsatz 6.1. Die zweite Maxwell-Gleichung sieht dann folgendermaßen aus:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dv = 0 \quad (13.13)$$

Das Integral 13.13 für **beliebige Volumina**  $V$  ist nur dann immer Null, wenn der Integrand  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  Null ist. Auf diese Weise entpuppt sich die **zweite Maxwell-Gleichung in ihrer differentiellen Form**:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13.14)$$

Das magnetische Pendant zur elektrischen Ladung ist die **magnetische Ladung**: Ein magnetischer Südpol und Nordpol. Wir nennen sie **magnetische Monopole**. Sie wurden experimentell noch nie beobachtet, weshalb zunächst angenommen wird, dass keine magnetischen Monopole existieren. Ihre Nichtexistenz wird in der zweiten Maxwell-Gleichung festgehalten (die rechte Seite ist Null). Die differentielle Darstellung der zweiten Maxwell-Gleichung ermöglicht uns eine **mikroskopische Interpretation** der Nicht-Existenz von magnetischen Monopolen. Die verschwindende Divergenz  $\nabla \cdot \mathbf{B}(x, y, z)$  des magnetischen Feldes bedeutet: Egal welchen Raumpunkt  $(x, y, z)$  wir betrachten – **in keinem Raumpunkt sitzt ein magnetischer Monopol**. Oder, wann die Divergenz ebenfalls verschwindet, ist der Fall, wenn im Raumpunkt  $(x, y, z)$  **ein idealer magnetischer Dipol sitzt**. Ein magnetischer Dipol ist eine Kombination aus dem Süd- und Nordpol. Diese sind unzertrennlich miteinander verbunden.

Da es keine magnetischen Monopole gibt, **existieren keine Quellen und Senken** des magnetischen Feldes. Folglich gibt es keine Raumpunkte, in denen **magnetische Feldvektoren entspringen** oder **auf einen Punkt**

**divergieren.** Die magnetischen Feldlinien müssen daher stets in sich geschlossen sein.

Die zweite Maxwell-Gleichung ist genauso wie die anderen Maxwell-Gleichungen **ein experimenteller Befund**. Das heißt, wenn irgendwann ein magnetischer Monopol gefunden werden sollte, zum Beispiel ein einzelner Nordpol ohne einen zugehörigen Südpol, dann muss die zweite Maxwell-Gleichung modifiziert werden. Für uns wäre das schön, denn dann würden die Maxwell-Gleichungen noch symmetrischer sein!

## 13.6 Die dritte Maxwell-Gleichung

### 13.6.1 Makroskopische Darstellung

Die **dritte Maxwell-Gleichung in Integralform** sieht folgendermaßen aus:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (13.15)$$

Auf der linken Seite steht ein Linienintegral des **elektrischen Feldes**  $\mathbf{E}$  über eine **geschlossene Linie**  $L$ , die die **Fläche**  $A$  **berandet**. Dieses Linienintegral summiert alle Anteile  $\mathbf{E}_{\parallel}$  des elektrischen Feldes auf, die entlang der Linie  $L$  verlaufen. Aus dem Kapitel 13.3 wissen wir, dass dieses Linienintegral der **elektrischen Spannung**  $U_e$  entlang der Schleife  $L$  entspricht. Die zweite Maxwell-Gleichung können wir also auch folgendermaßen schreiben:

$$U_e = - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (13.16)$$

Diese Form der dritten Maxwell-Gleichung wird als **Induktionsgesetz** bezeichnet. Auf der rechten Seite des Induktionsgesetzes steht ein Flächenintegral der Zeitableitung des magnetischen Feldes. Wenn die Fläche  $A$ , die das Magnetfeld durchdringt, sich zeitlich nicht verändert, dürfen wir die

**Zeitableitung**  $\frac{\partial}{\partial t}$  vor das Integral ziehen:

$$U_e = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (13.17)$$

Nun können wir das Flächenintegral auf der rechten Seite als **magnetischen Fluss  $\Phi_m$  durch die Fläche  $A$**  interpretieren:

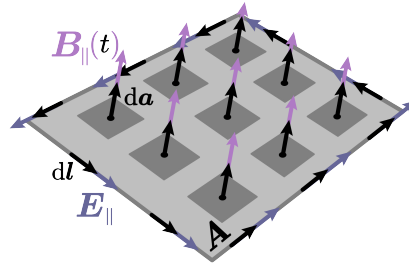
$$U_e = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (13.18)$$

Die Zeitableitung vor dem magnetischen Fluss ist auch noch da. Der magnetische Fluss wird in der dritten Maxwell-Gleichung also nach der Zeit abgeleitet. Die Zeitableitung des magnetischen Flusses gibt anschaulich an, **wie schnell sich der magnetische Fluss verändert**, wenn die Zeit verstreicht. Die dritte Maxwell-Gleichung sagt also zwei äquivalente Dinge aus:

- Je schneller sich der magnetische Fluss  $\Phi_m$  durch die eingeschlossene Fläche  $A$  verändert, desto größer ist die erzeugte Spannung  $U_e$  entlang des Flächenrandes  $L$ .
- Je schneller sich der magnetische Fluss durch die eingeschlossene Fläche  $A$  verändert, desto stärker ist der **parallel verlaufende Feldanteil  $E_{\parallel}$** , der entlang des Flächenrandes  $L$  verläuft. Dieses elektrische Feld entlang des Randes wird auch als **elektrisches Wirbelfeld** bezeichnet, weil dieser Feldanteil anschaulich gesprochen um den Flächenrand herumwirbelt:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (13.19)$$

Wir können natürlich die dritte Maxwell-Gleichung 13.19, ausgedrückt mit dem Wirbelfeld, auch genau andersherum interpretieren: **Je stärker das elektrische Wirbelfeld  $E$**  (oder genauer  $E_{\parallel}$ ) um die Randfläche  $L$  **desto schneller ändert sich der magnetische Fluss  $\Phi_m$**  (oder äquivalent  $B_{\parallel}$ ) durch die umwirbelte Fläche  $A$ .



Du fragst dich sicherlich auch, was das **Minuszeichen vor der Zeitableitung** bedeutet? Das Minuszeichen berücksichtigt die **Rotationsrichtung des Wirbelfeldes**:

- Wenn die Änderung des magnetischen Flusses **positiv** ist, also  $\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} > 0$ , dann ist die Spannung wegen des Minuszeichens **negativ**, also  $U_e < 0$ .
- Wenn die Änderung des magnetischen Flusses **negativ** ist, also  $\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} < 0$ , dann ist die Spannung wegen des Minuszeichens **positiv**, also  $U_e > 0$ .

Der Wirbelanteil  $E_{||}$  des elektrischen Feld  $E$  wirbelt also so herum, dass damit die **Änderung des magnetischen Flusses gehemmt wird**. Die Natur versucht die Flussänderung mit einem Wirbelfeld zu unterbinden. Dieses Minuszeichen in der dritten Maxwell-Gleichung kennst du wahrscheinlich noch aus der Schule als **Lenz-Regel**. Das Minuszeichen berücksichtigt den Energieerhaltungssatz.

Was würde passieren, wenn wir das Minuszeichen weglassen würden? Das elektrische Wirbelfeld (mit der **Feldenergie**  $W_e$ ) würde eine magnetische Flussänderung  $\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}$  erzeugen. Diese wiederum würde das elektrische Wirbelfeld verstärken. Dadurch würde die Feldenergie  $W_e$  steigen. Das verstärkte Wirbelfeld führt zu einer verstärkten Flussänderung. Das führt wiederum zu einem noch größeren Wirbelfeld und damit zu einer größeren Feldenergie.

Diese gegenseitige Verstärkung hört nicht auf und die Feldenergie  $W_e$  wird unendlich groß. Diese könnten wir beispielsweise mit einem Kondensator anzapfen und hätten eine unerschöpfliche Energiequelle. Das verletzt dann nicht nur den Energieerhaltungssatz, sondern auch den dritten Hauptsatz der

Thermodynamik, der besagt, dass es unmöglich ist, ein derartiges Perpetuum Mobile zu bauen.

Wenn sich der magnetische Fluss zeitlich nicht verändert  $\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = 0$ , dann entsteht natürlich auch **kein elektrisches Wirbelfeld** und auch keine elektrische Spannung. Die rechte Seite der dritten Maxwell-Gleichung 13.19 fällt also weg:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (13.20)$$

Nun steht in 13.20, dass das Linienintegral über das elektrische Feld, also die elektrische Spannung  $U_e$ , entlang einer geschlossenen Linie  $L$  stets Null ist. **Es existiert also kein elektrisches Wirbelfeld, solange es kein sich zeitlich veränderndes Magnetfeld gibt!** Das bedeutet: Würde ein Elektron die geschlossene Linie  $L$  im elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  durchlaufen, dann würde das Elektron seine Energie nicht verändern.

### 13.6.2 Mikroskopische Darstellung

Lass uns nun die dritte Maxwell-Gleichung 13.15 in integraler Darstellung in eine **differentielle Darstellung** überführen, um die Maxwell-Gleichung auch **mikroskopisch interpretieren** zu können. Dazu nutzen wir den Stokes-Integralsatz aus dem Kapitel 7, der ein **Linienintegral mit einem Flächenintegral verknüpft**. Ersetzen wir also in 13.15 das Linienintegral mit einem Flächenintegral:

$$\int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} = - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (13.21)$$

Dadurch kommt die **Rotation**  $\nabla \times \mathbf{E}$  ins Spiel. Da die Gleichung 13.21 **für beliebige** Flächen  $A$  gilt, müssen die Integranden auf beiden Seiten gleich sein. Damit bekommen wir die **dritte Maxwell-Gleichung in differentieller Darstellung**:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (13.22)$$

Die differentielle Darstellung 13.22 besagt: Wenn sich am Raumpunkt  $(x, y, z)$  das **Magnetfeld**  $B(t, x, y, z)$  zeitlich verändert, dann wird um diesen **Raumpunkt ein elektrisches Wirbelfeld**  $E(t, x, y, z)$  erzeugt, dass diese Magnetfeldänderung zu hemmen versucht. Die Interpretation funktioniert natürlich auch andersherum: Ein elektrisches Wirbelfeld um einen Raumpunkt erzeugt ein zeitlich änderndes Magnetfeld.

Wenn sich das **Magnetfeld** nicht verändert, also **statisch** ist, fällt die rechte Seite in 13.22 weg und die dritte Maxwell-Gleichung vereinfacht sich zu einer **elektrostatischen Maxwell-Gleichung**:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (13.23)$$

Mit »elektrostatisch« ist hier gemeint, dass das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  zeitunabhängig ist. Solange es kein sich änderndes magnetisches Feld gibt, ist das **elektrische Feld stets  $\mathbf{E}$  wirbelfrei**. Aus der Mathematik wissen wir: Wenn die Rotation  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  eines Vektorfeldes  $\mathbf{F}$  verschwindet, dann ist das **Vektorfeld konservativ**, also energieerhaltend. Das **elektrostatische elektrische Feld  $\mathbf{E}$**  in Gl. 13.23 ist also konservativ. Elektrische Ladungen werden in diesem elektrischen Feld weder beschleunigt noch abgebremst - sie ändern ihre Energie nicht.

## 13.7 Die vierte Maxwell-Gleichung

### 13.7.1 Makroskopische Darstellung

Die **vierte Maxwell-Gleichung in Integralform** sieht folgendermaßen aus:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \mathbf{I} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (13.24)$$

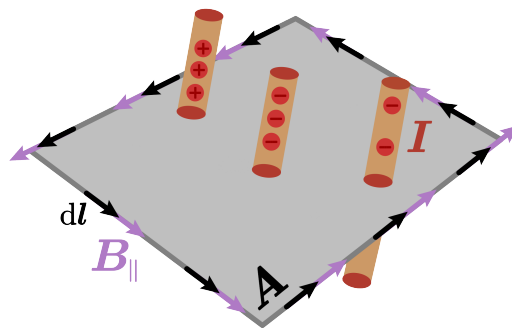
Auf der linken Seite der vierten Maxwell-Gleichung steht ein Linienintegral des **magnetischen Feldes  $\mathbf{B}$**  entlang der geschlossenen Linie (Schleife)  $L$ . Was dieses Linienintegral zu bedeutet hat, kennen wir bereits vom Linienintegral über das elektrische Feld in Gl. 13.19. Es gibt den **Wirbelanteil  $B_{\parallel}$**  des



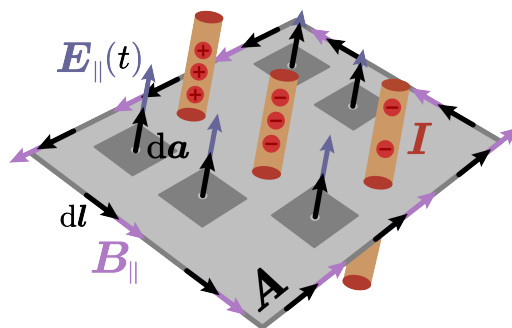
magnetischen Feldes  $B$  an, der **um die Schleife  $L$  herumwirbelt**.

Die rechte Seite der vierten Maxwell-Gleichung 13.24 verrät uns, wie wir dieses magnetische Wirbelfeld erzeugen können:

- Wir können es mit einem **elektrischen Strom  $I$**  durch die Fläche  $A$  erzeugen. Dieser Strom **muss sich nicht zeitlich verändern**, um ein magnetisches Wirbelfeld zu erzeugen.



- Wir können es mit einem sich **zeitlich ändernden elektrischen Feld  $E(t)$**  durch die Fläche  $A$  erzeugen.
- Wir können es mit beiden Beiträgen,  $I$  und  $E(t)$ , erzeugen.



Die elektrische  $\varepsilon_0$  und magnetische Feldkonstante  $\mu_0$  in der vierten Maxwell-Gleichung sind für das Verständnis der vierten Maxwell-Gleichung irrelevant. Diese Naturkonstanten sorgen lediglich dafür, dass die rechte Seite auch die Einheit »Tesla mal Meter« hat, wie die linke Seite der Gleichung.

Auf der rechten Seite von 13.24 dürfen wir die Zeitableitung vor das Integral ziehen, wenn sich die Fläche  $A$  nicht verändert:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \mathbf{I} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (13.25)$$

Dann entspricht das Flächenintegral, integriert über das elektrische Feld, genau dem **elektrischen Fluss**  $\Phi_e$  durch die Fläche  $A$ :

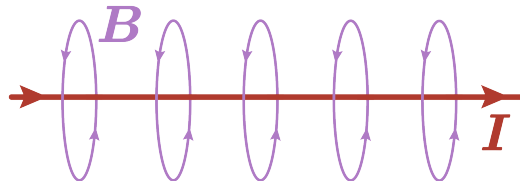
$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \mathbf{I} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \quad (13.26)$$

### 13.7.2 Ampere-Gesetz

Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich, wenn sich der elektrische Fluss zeitlich nicht verändert, also  $\frac{\partial \Phi_e}{\partial t} = 0$ , dann vereinfacht sich die vierte Maxwell-Gleichung zum **Ampere-Gesetz**:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \mathbf{I} \quad (13.27)$$

Nach dem **Ampere-Gesetz** erzeugt ein stromdurchflossener Leiter ein magnetisches Wirbelfeld um den Leiter herum.



### 13.7.3 Mikroskopische Darstellung

Lass uns nun die differentielle Darstellungsform der vierten Maxwell-Gleichung herleiten. Mit dem Stokes-Integralsatz 7.1 überführen wir das Linienintegral in der integralen Darstellung 13.24 in ein Flächenintegral. Auf diese Weise kommt

die Rotation des Magnetfeldes  $\nabla \times \mathbf{B}$  ins Spiel:

$$\int_A (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \mathbf{I} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (13.28)$$

Jetzt muss noch der Term mit dem elektrischen Strom  $\mathbf{I}$  in ein Flächenintegral umgewandelt werden. Dazu müssen wir lediglich den Strom mit der **elektrischen Stromdichte**  $\mathbf{j}$  ausdrücken. Die Stromdichte ist definiert als Strom pro Querschnittsfläche. Folglich entspricht das Flächenintegral über die Stromdichte dem Strom durch die Querschnittsfläche  $A$ . Die vierte Maxwell-Gleichung wird so zu:

$$\int_A (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (13.29)$$

Beachte, dass im Integral das Skalarprodukt der Stromdichte mit dem Flächenelement  $d\mathbf{a}$  genommen wird. Das Skalarprodukt pickt also nur den Teil  $\mathbf{j}_{\parallel}$  des Stromdichtevektors, der **parallel zum Flächenvektor**  $d\mathbf{a}$  verläuft. Nur dieser Stromdichteanteil trägt zum Strom durch die Querschnittsfläche  $A$  bei.

Nun haben wir in jedem Term der vierten Maxwell-Gleichung ein Flächenintegral stehen. Die beiden Flächenintegrale auf der rechten Seite können wir zu einem Flächenintegral zusammenfassen, weil bei beiden Summanden über die gleiche Fläche integriert wird:

$$\int_A (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \int_A \left( \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \quad (13.30)$$

Damit die Maxwell-Gleichung 13.30 für **beliebige Flächen**  $A$  erfüllt ist, müssen die Integranden auf beiden Seiten gleich sein. Damit bekommen wir die **vierte Maxwell-Gleichung in differentieller Darstellung**:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (13.31)$$

Was sagt die vierte Maxwell-Gleichung **mikroskopisch** aus? Wenn sich am **Raumpunkt**  $(x, y, z)$  das **elektrische Feld**  $E(t, x, y, z)$  **zeitlich verändert** oder dort die **Stromdichte**  $j(t, x, y, z)$  **nicht Null** ist, dann wird um diesen Raumpunkt ein **magnetisches Wirbelfeld**  $B(t, x, y, z)$  **erzeugt**.

Nun solltest du die vier Maxwell-Gleichungen intuitiv verstanden haben. Als nächstes schauen wir uns an, wo genau sich die elektromagnetischen Wellen in den Maxwell-Gleichungen verstecken.

# 14. Elektromagnetische Wellen

**Mehr:** [de.fufaev.org/elektromagnetische-wellen](http://de.fufaev.org/elektromagnetische-wellen)

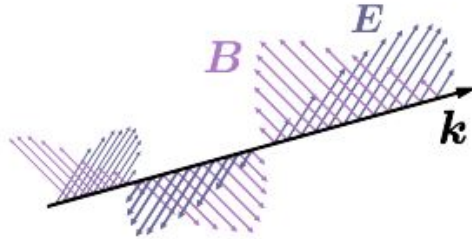
Eine elektromagnetische Welle (kurz: EM-Welle) besteht aus einem **elektrischen Feldanteil**  $\mathbf{E}(t, x, y, z)$  und aus einem **magnetischen Feldanteil**  $\mathbf{B}(t, x, y, z)$ . Die beiden Feldanteile weisen jedem Punkt  $(x, y, z)$  im dreidimensionalen Raum zu jedem Zeitpunkt  $t$  eine elektrische und magnetische Feldstärke sowie deren Richtung zu. Die beiden Feldanteile sind also dreidimensionale Vektorfelder:

$$\mathbf{E}(t, x, y, z) = \begin{bmatrix} E_1(t, x, y, z) \\ E_2(t, x, y, z) \\ E_3(t, x, y, z) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(t, x, y, z) = \begin{bmatrix} B_1(t, x, y, z) \\ B_2(t, x, y, z) \\ B_3(t, x, y, z) \end{bmatrix}$$

- Der Betrag (Feldstärke)  $E(t, x, y, z)$  (nicht in fett dargestellt) gibt die **elektrische Amplitude** einer elektromagnetischen Welle an.
- Der Betrag (Feldstärke)  $B(t, x, y, z)$  gibt die **magnetische Amplitude** einer elektromagnetischen Welle an.

Die Amplituden sind im Allgemeinen nicht nur ortsabhängig, sondern sie ändern sich auch mit der Zeit  $t$ . Nur so bekommen wir eine elektromagnetische

**Schwingung in Raum und Zeit.** Das folgende Bild zeigt die Schwingung des  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Vektors im Raum. Der **Wellenvektor**  $\mathbf{k}$  gibt dabei die **Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle** an:



Wie sich eine elektromagnetische Welle genau örtlich und zeitlich verändert, also wie sie sich **im Raum bewegt und ausbreitet**, wird durch die **Wellengleichungen** für  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Vektoren beschrieben. Schauen wir uns an, wie wir diese Wellengleichungen aus den Maxwell-Gleichungen extrahieren können:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass sich die elektromagnetische Welle in einem **leeren Raum** ausbreitet, **ohne Ladungen** ( $\rho = 0$ ) **und Ströme** ( $\mathbf{j} = 0$ ) **in der Nähe**. Wir setzen also sowohl die Ladungsdichte  $\rho$  als auch die Stromdichte  $\mathbf{j}$  in den Maxwell-Gleichungen gleich Null. Damit vereinfachen sie sich zu **ladungs- und**

stromfreien Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (14.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (14.2)$$

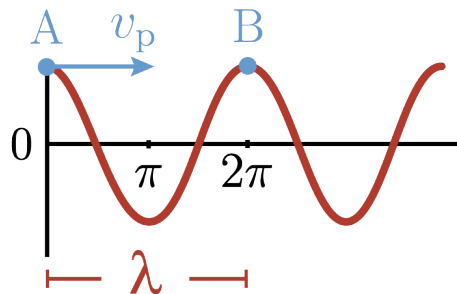
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (14.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (14.4)$$

Die allgemeine Form einer **Wellengleichung für ein Vektorfeld  $\mathbf{F}$**  sieht folgendermaßen aus:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} \quad (14.5)$$

Hierbei ist  $\mathbf{F}$  ein beliebiges Vektorfeld, das die **Wellengleichung erfüllt** und  $v_p$  ist die **Phasengeschwindigkeit** der Welle. Sie gibt an, wie schnell sich ein Punkt der Welle im Raum fortbewegt. Da wir hier keine Dispersion (d.h. ein Auseinanderlaufen der Welle) betrachten, beschreibt die Phasengeschwindigkeit die **Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle**.



Eine Rechenregel, die für die Herleitung der Wellengleichung notwendig ist, ist der folgende Zusammenhang für die **Rotation der Rotation des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$**  (doppeltes Kreuzprodukt):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad (14.6)$$

Die vier Maxwell-Gleichungen sind **gekoppelte Differentialgleichungen**. »Gekoppelt« heißt hier, dass die dritte und vierte Maxwell-Gleichung sowohl das gesuchte  $\mathbf{E}$ -Feld als auch  $\mathbf{B}$ -Feld enthalten. Um die Wellengleichungen für den  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Feldanteil einer elektromagnetische Welle zu bekommen, müssen wir die beiden gekoppelten **Maxwell-Gleichungen entkoppeln**. Machen wir das mal. Das geht ganz einfach.

## 14.1 Wellengleichung für das $\mathbf{E}$ -Feld

Um auf die Wellengleichung für das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  zu kommen, müssen wir die **dritte Maxwell-Gleichung entkoppeln**:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (14.7)$$

Wenden wir dazu auf beiden Seiten der dritten Maxwell-Gleichung den **Rotationsoperator mit Kreuzprodukt**  $\nabla \times$  an:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (14.8)$$

Die Zeitableitung zusammen mit dem Minuszeichen dürfen wir vor den Nabla-Operator ziehen, da der Nabla-Operator **nur Ortsableitungen enthält** und damit **nicht von der Zeit abhängt**:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (14.9)$$

Nun können wir die Rotation  $\nabla \times \mathbf{B}$  des Magnetfelds mithilfe der vierten stromfreien Maxwell-Gleichung 14.4 ersetzen:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (14.10)$$

$$= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (14.11)$$

$$= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (14.12)$$



Mit der rechten Seite sind wir fertig. Sie hat die gleiche Form wie die allgemeine Wellengleichung 14.5. Jetzt müssen wir noch das doppelte Kreuzprodukt auf der linken Seite mit der Rechenregel 14.6 ersetzen:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (14.13)$$

Auf der linken Seite steht die Divergenz  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  des elektrischen Feldes. Nach der ersten Maxwell-Gleichung 14.2 ist die Divergenz des elektrischen Feldes im ladungsfreien Raum stets Null. Damit vereinfacht sich 14.13 zur **Wellengleichung für den elektrischen Feldanteil einer elektromagnetischen Welle**:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (14.14)$$

Die Wellengleichung **verknüpft also Ortsableitungen**  $\nabla^2 \mathbf{E}$  des elektrischen Feldes mit den **Zeitableitungen**  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t^2}$  und stellt damit ein System von **drei partiellen Differentialgleichungen** dar.

Wenn wir die Wellengleichung 14.14 für das elektrische Feld mit der allgemeinen Form 14.5 einer Wellengleichung vergleichen, dann finden wir heraus, wie die **Ausbreitungsgeschwindigkeit**  $v_p$  mit den beiden Feldkonstanten  $\mu_0$  und  $\varepsilon_0$  **zusammenhängt**:

$$\frac{1}{v_p^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \quad \leftrightarrow \quad v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (14.15)$$

Wenn wir konkret die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle berechnen, bekommen wir die **Lichtgeschwindigkeit**  $c$  heraus:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = c \quad (14.16)$$

Wir können aus den Maxwell-Gleichungen und der hergeleiteten Wellengleichung für das  $\mathbf{E}$ -Feld schlussfolgern, dass der **elektrische**

Feldanteil der elektromagnetischen Welle sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Wir werden sehen, dass es auch für den  $B$ -Feldanteil gilt. Wir können die  $E$ -Wellengleichung also auch mit Lichtgeschwindigkeit ausdrücken:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (14.17)$$

## 14.2 Wellengleichung für das $B$ -Feld

Um die Wellengleichung für das magnetische Feld  $B$  herzuleiten, müssen wir die vierte Maxwell-Gleichung 14.4 entkoppeln. Das Entkoppeln geht analog wie wir es beim  $E$ -Feld gemacht haben.

Wende den Rotationsoperator mit Kreuzprodukt  $\nabla \times$  auf beiden Seiten der vierten stromfreien Maxwell-Gleichung an:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \left( \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (14.18)$$

Ziehen wir nun die Zeitableitung und die beiden Konstanten auf der rechten Seite vor den Nabla-Operator:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (14.19)$$

Jetzt können wir die Rotation  $\nabla \times \mathbf{E}$  des elektrischen Feldes mit der dritten Maxwell-Gleichung ersetzen:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (14.20)$$

Nun haben wir die dritte Maxwell-Gleichung entkoppelt. Die Zeitableitung auf der rechten Seite wird zusammengefasst und das doppelte Kreuzprodukt auf der

linken Seite mittels der Rechenregel 14.6 ersetzt:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t^2} \quad (14.21)$$

Die Divergenz  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  verschwindet nach der zweiten Maxwell-Gleichung (es gibt keine magnetischen Monopole). Der Term  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B})$  fällt also weg und übrig bleibt die **Wellengleichung für das magnetische Feld einer elektromagnetischen Welle**:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t^2} \quad (14.22)$$

Um konkrete elektromagnetische Wellen (z.B. Kugelwellen, die von einem Funkmast ausgehen) herauszubekommen, müssen wir diese Wellengleichungen für bestimmte Anfangs- oder Randbedingungen lösen. Das können Mathematiker oder Python für uns tun. Wichtig ist, dass du nun weißt, wie man **Wellengleichungen aus den Maxwell-Gleichungen herausbekommt** und, dass deren **Lösung elektromagnetische Wellen beschreibt**, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

## 14.3 Ein paar Hinweise

Die hergeleiteten Wellengleichungen 14.14 und 14.22 sind **partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung**. Wenn wir uns beispielsweise die Wellengleichung 14.14 für das  $\mathbf{E}$ -Feld anschauen, dann sind es genau genommen **drei** partielle Differentialgleichungen:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t^2}$$

Warum? Weil das  $\mathbf{E}$ -Feld ein **Vektor mit drei Komponenten**  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  ist. Schreiben wir diese Wellengleichung mal aus, um zu verstehen, was ich

damit meine:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2} \end{bmatrix} \quad (14.23)$$

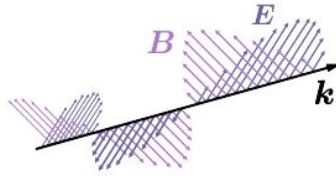
Siehst du? Es sind **drei** Differentialgleichungen für das  $\mathbf{E}$ -Feld, die man lösen muss. Sie sind zum Glück **nicht miteinander gekoppelt** und können damit unabhängig voneinander gelöst werden. Physikalisch bedeuten nicht gekoppelte Differentialgleichungen: Die drei **Feldkomponenten**  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  schwingen **unabhängig voneinander**. Sie **überlagern sich nicht!**

Die **Lösung**  $\mathbf{E}(t, x, y, z)$  der Wellengleichung 14.14 ist zwar eine elektrische Welle, aber sie repräsentiert **nicht unbedingt das  $\mathbf{E}$ -Feld einer elektromagnetischen Welle**, nur weil  $\mathbf{E}(t, x, y, z)$  die Wellengleichung löst. Die Lösung  $\mathbf{E}(t, x, y, z)$  beschreibt nur dann das  $\mathbf{E}$ -Feld einer elektromagnetischen Welle im Vakuum, wenn die **Lösung auch alle vier Maxwell-Gleichungen** erfüllt.

An der vierten, stromfreien Maxwell-Gleichung 14.4 können wir beispielsweise direkt die Ausrichtung des  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Feldanteils herauslesen. Hier ist die Maxwell-Gleichung nochmal:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Wir kennen aus der Mathematik, dass der Ergebnis-Vektor  $\nabla \times \mathbf{B}$  des Kreuzprodukts stets orthogonal zu den Vektoren ist, zwischen denen das Kreuzprodukt gebildet wird. In diesem Fall steht also der  $\mathbf{B}$ -Feldvektor senkrecht zur Ableitung des  $\mathbf{E}$ -Feldvektors. Die Zeitableitung ändert aber nicht die Richtung eines Vektors. Der  $\mathbf{E}$ -Feldvektor und seine Ableitung zeigen also in die gleiche Richtung. Damit **stehen die Lösungen  $\mathbf{E}(t, x, y, z)$  und  $\mathbf{B}(t, x, y, z)$  der Wellengleichung zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort senkrecht zueinander**.



Nun solltest du ein intuitives Verständnis über die elektromagnetischen Wellen und die dazugehörigen Wellengleichungen haben!



# IW Die Quantenwelt

<b>15</b>	<b>Schrödinger-Gleichung .....</b>	<b>151</b>
<b>16</b>	<b>Bra-Ket-Notation .....</b>	<b>177</b>
<b>17</b>	<b>Operatoren als Matrizen darstellen</b>	





# 15. Schrödinger-Gleichung

**Mehr:** [de.fufaev.org/schrodinger-gleichung](http://de.fufaev.org/schrodinger-gleichung)

Die meisten Phänomene unserer alltäglichen Welt lassen sich mit der klassischen Mechanik beschreiben. Das Ziel der klassischen Mechanik, ist es herauszufinden, wie sich ein **Körper im Verlauf der Zeit bewegt**. Die klassische Mechanik bestimmt also die **Trajektorie  $r(t)$** , also die Bahn dieses Körpers. Mit der Trajektorie können wir zu jedem Zeitpunkt  $t$  vorhersagen, wo dieser Körper war, ist und sein wird. Damit beschreiben wir also die Bewegung des Körpers.

Hier sind einige Beispiele für die Bewegung der Körper, deren Trajektorie  $r(t)$  mit der klassischen Mechanik vorhergesagt werden kann:

- Bewegung unserer Erde um die Sonne
- Bewegung eines Satelliten um die Erde
- Bewegung einer Rakete
- Bewegung eines schwingenden Pendels
- Bewegung eines geworfenen Steins

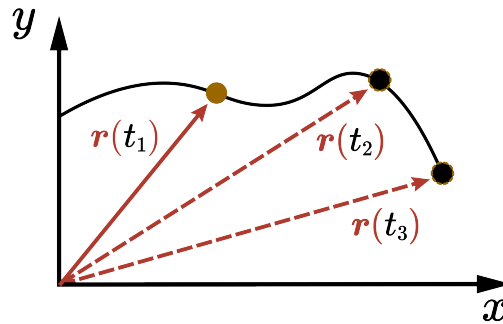
Das sind alles **klassische Probleme**, die **mithilfe des zweiten Newton-**

Axioms gelöst werden können, also mit der Differentialgleichung:

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F} \leftrightarrow m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla W_{\text{pot}} \quad (15.1)$$

Hierbei ist  $W_{\text{pot}}$  die potentielle Energie eines Körpers der Masse  $m$ . Das kann beispielsweise die potentielle Energie im Gravitationsfeld der Erde sein.

Durch das **Lösen der Newton-Differentialgleichung** 15.1 können wir die **gesuchte Trajektorie  $\mathbf{r}(t)$  eines Körpers herausfinden**. Die Lösung ist ein Ortsvektor  $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ , der die dreidimensionale Position des Körpers zu jedem Zeitpunkt  $t$  angibt.



Sobald wir die Trajektorie  $\mathbf{r}(t)$  durch das Lösen der Differentialgleichung bestimmt haben, können wir dann daraus **alle weiteren physikalischen Größen berechnen**. Hier ein paar Beispiele für diese Größen:

- **Geschwindigkeit** des Körpers:  $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$
- **Impuls** des Körpers:  $\mathbf{p}(t) = m \mathbf{v}(t)$
- **Kinetische Energie** des Körpers:  $W_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$

Um die Lösung  $\mathbf{r}(t)$  **konkret** angeben zu können, müssen außerdem die **Anfangsbedingungen**, die das zu lösende Problem charakterisieren, **bekannt sein**. In der klassischen Physik sind es die **Anfangsposition  $\mathbf{r}(t_0)$**  und die **Anfangsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}(t_0)$**  des Körpers.

In der Quantenmechanik wäre dagegen die Angabe einer **Anfangsposition**

und Anfangsgeschwindigkeit aufgrund der Heisenberg-Unschärferelation gar nicht möglich. Aber auch die Vorgehensweise mit dem zweiten Newton-Axiom und der Bestimmung der Trajektorie  $\mathbf{r}(t)$  ist für ein quantenmechanisches Teilchen nicht möglich. Denn ein Quantenteilchen (wie beispielsweise das Elektron) **verhält sich unter vielen Bedingungen wie eine Welle**. Der Ort  $\mathbf{r}(t)$  eines Elektrons lässt sich aufgrund dieses Wellencharakters nicht punktgenau bestimmen, weil **eine Welle nicht an einem einzigen Ort konzentriert** ist. Und, wenn wir versuchen die Welle auf einen festen Ort zu quetschen, dann wird nach der Heisenberg-Unschärferelation der Impuls  $\mathbf{p}(t)$  eines Elektrons nicht mehr genau bestimmbar.

Wir können also nicht wie in der klassischen Mechanik die Trajektorie eines Quantenteilchens bestimmen und aus dieser alle anderen Bewegungsgrößen herleiten, sondern **müssen einen anderen Weg finden**, um ein Quantenteilchen zu beschreiben. Und dieser andere Weg ist die Entwicklung der Quantenmechanik und der Schrödinger-Gleichung.

Erst durch die neuartige Herangehensweise an die Natur mithilfe der Schrödinger-Gleichung ist es den Menschen gelungen, einen Teil des Mikrokosmos beherrschbar zu machen. Der Mensch ist dadurch in der Lage, **Laser zu bauen**, die heutzutage in der Medizin und Forschung nicht mehr wegzudenken sind. Oder **Rastertunnelmikroskope**, die das Auflösungsvermögen der üblichen Lichtmikroskope deutlich übersteigen. Erst durch die Schrödinger-Gleichung wurde das **Periodensystem der Elemente** und die **Kernfusion in unserer Sonne** genau verstanden. Doch es ist nur ein Bruchteil der Anwendungen, die die Schrödinger-Gleichung und die Quantenmechanik uns beschert haben. Lass uns deshalb diese mächtige Gleichung etwas näher kennenlernen.

Schau dir die folgende **zeitabhängige Schrödinger-Gleichung in einer Raumdimension** an und lasse sie auf dich wirken:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + W_{\text{pot}} \Psi \quad (15.2)$$

Wir können jetzt schon mal mathematisch festhalten, dass die Schrödinger-Gleichung eine **partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung** ist:

- Die Schrödinger-Gleichung ist eine **Differentialgleichung**. Die **gesuchte Größe ist eine Funktion** und in der Gleichung kommen Ableitungen dieser Funktion vor. Die in der Schrödinger-Gleichung gesuchte Funktion ist die sogenannte **Wellenfunktion**  $\Psi(x, t)$ . Sie hängt vom **Ort**  $x$  und von der **Zeit**  $t$  ab und beschreibt ein quantenmechanisches Teilchen mit der Masse  $m$  und potentieller Energie  $W_{\text{pot}}$ . Beachte, dass in der Schrödinger-Gleichung  $x$  eine Raumkoordinate angibt und nicht, wie in der klassischen Mechanik, die (eindimensionale) Trajektorie  $x(t)$  des Ortsvektors  $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ .
- Die Schrödinger-Gleichung ist eine **partielle** Differentialgleichung. In ihr kommen also Ableitungen von  $\Psi$  nach verschiedenen Variablen vor, nämlich die **Ableitung nach dem Ort**  $x$  und die **Ableitung nach der Zeit**  $t$ .
- Die Schrödinger-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung **zweiter Ordnung**. Mit »zweiter Ordnung« ist gemeint, dass die **maximale Ableitung**, die in der Differentialgleichung vorkommt, **die zweite Ableitung** ist. Die Wellenfunktion wird in der Schrödinger-Gleichung zweimal nach dem Ort abgeleitet.

So wie es bei jeder Differentialgleichung der Fall ist, ist unser Ziel, die Schrödinger-Gleichung zu lösen, um die gesuchte Wellenfunktion  $\Psi$  zu finden und anschließend die Anfangsbedingungen für ein konkretes quantenmechanisches Problem (z.B. ein Elektron im Potentialtopf) einzusetzen.

Es gibt jedoch **kein allgemeines Rezept** dafür, wie die Schrödinger-Differentialgleichung für ein gegebenes Problem gelöst werden kann. Die meisten Quantenprobleme lassen sich nicht einmal analytisch (exakt) lösen, sondern **erfordern Näherungsmethoden oder numerische Lösungen** mithilfe eines Computers.

## 15.1 Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

Es ist leider nicht möglich, die Schrödinger-Gleichung allein aus der klassischen Mechanik herzuleiten. Wir brauchen noch den **Welle-Teilchen-Dualismus**, der innerhalb der klassischen Mechanik nicht vorkommt. Lass uns im Folgenden die Schrödinger-Gleichung motivieren und damit verstehen, welche fundamentalen Prinzipien in ihr stecken.

Wir machen unser Leben einfacher, indem wir eine **eindimensionale** Bewegung betrachten. In einer Dimension kann sich ein Quantenteilchen nur entlang einer geraden Linie bewegen, nämlich entlang der Ortsachse  $x$ .

### 15.1.1 Energieerhaltungssatz

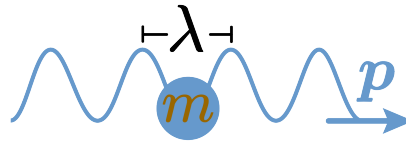
Nehmen wir nun ein Teilchen der **Masse**  $m$ , das mit einer **Geschwindigkeit**  $v$  in  $x$ -Raumrichtung fliegt. Das Teilchen hat somit eine **kinetische Energie**  $W_{\text{kin}}$ . Es kann sich außerdem in einem konservativen (d.h. energieerhaltenden) Feld befinden, beispielsweise in einem Gravitationsfeld oder in einem elektrischen Feld eines Plattenkondensators. Das Teilchen kann also auch eine **potentielle Energie**  $W_{\text{pot}}$  haben. Die **Gesamtenergie**  $W$  des Teilchens setzt sich aus der kinetischen und potentiellen Energie zusammen und ist zeitlich konstant (d.h. Gesamtenergie bleibt erhalten):

$$W = W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}} \quad (15.3)$$

Die Gesamtenergie und deren zeitliche Erhaltung sollten dir bekannt sein. Du kennst das bereits aus den Grundlagen der klassischen Mechanik. Der **Energieerhaltungssatz** ist ein fundamentales Prinzip der Physik, das **auch in der Quantenmechanik** in abgewandelter Form in konservativen Feldern **erfüllt** ist.

### 15.1.2 Welle-Teilchen-Dualismus

Die Eigenartigkeit der Quantenmechanik kommt durch den Welle-Teilchen-Dualismus hinzu. Dieser erlaubt es uns das **Teilchen als eine Materiewelle** anzusehen.



Der Welle-Teilchen-Dualismus verknüpft den »teilchenartigen« Impuls  $p$  mit der »wellenartigen« Größe, nämlich mit der **de-Broglie-Wellenlänge**  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{h}{p} \leftrightarrow p = \frac{h}{\lambda} \quad (15.4)$$

Die beiden Größen werden durch das **Planck-Wirkungsquantum**  $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$  Js miteinander verknüpft. Wegen des **winzigen Werts** von  $h$  ist es verständlich, warum wir **keinen Welle-Teilchen-Dualismus in unserem makroskopischen Alltag** beobachten.

In der theoretischen Physik ist es üblich, den Impuls 15.4 nicht mit der de-Broglie-Wellenlänge  $\lambda$  auszudrücken, sondern mit der **Wellenzahl**  $k$ . Damit sieht der Impuls folgendermaßen aus:

$$p = \frac{h k}{2\pi} = \hbar k \quad (15.5)$$

Hierbei wird  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  als **reduziertes Wirkungsquantum** definiert und dient lediglich der kürzeren Schreibweise. Ob wir den Teilchenimpuls wie in Gl. 15.4 oder 15.5 darstellen, ist reine Geschmackssache. Wir halten uns hier einfach an die übliche Darstellung 15.5 in der theoretischen Physik.

Der Impuls 15.5 ist auch ein Maß dafür, ob sich das Teilchen eher teilchenartig oder wellenartig verhält:

- **Je kleiner die Wellenzahl**  $k$  (also je größer die de-Broglie-Wellenlänge  $\lambda$ ), desto eher verhält sich das Teilchen quantenmechanisch - also eher wie eine Materiewelle. In diesem Fall sprechen wir von einem **quantenmechanischen Teilchen**.

- **Je größer die Wellenzahl  $k$**  (also je kleiner die de-Broglie-Wellenlänge  $\lambda$ ), desto eher verhält sich das Teilchen klassisch - also wie ein richtiges Teilchen. In diesem Fall sprechen wir von einem **klassischen Teilchen**.

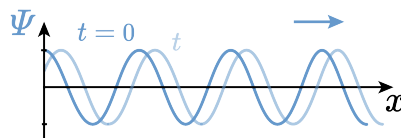
Eine kleine Wellenzahl (also eine große de-Broglie-Wellenlänge) hat das Teilchen, wenn es einen sehr kleinen Impuls  $p$  hat. Also eine kleine Masse  $m$  und kleine Geschwindigkeit  $v$ . Ein perfekter Kandidat für ein derartiges quantenmechanisches Teilchen ist ein **freies Elektron**. Mit »frei« ist gemeint, dass es sich keinem externen Feld befindet. Das Elektron verhält sich wie eine ausgedehnte Materiewelle, die wir mathematisch mit einer **ebenen Welle** beschreiben können. Wir bezeichnen die **ebene Materiewelle** hier mit dem großen griechischen Buchstaben  $\Psi(x, t)$ . Eine ebene Materiewelle hängt im Allgemeinen von der Ortskoordinate  $x$  und von der Zeit  $t$  ab.

### 15.1.3 Ebene Welle

Wir können eine ebene Welle, die die **Wellenzahl  $k$** , (**Kreis**)**frequenz  $\omega$**  und **Amplitude  $A$**  hat, durch eine Cosinusfunktion (oder Sinusfunktion) beschreiben:

$$\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (15.6)$$

Wenn die Zeit  $t$  voranschreitet, bewegt sich die Materiewelle in die positive  $x$ -Richtung, genauso wie das von uns betrachtete Elektron.



Damit das Rechnen mit solchen ebenen Wellen ohne irgendwelche Additionstheoreme geschieht, überführen wir die ebene Welle **in eine komplexe Exponentialfunktion**. Das ist eine äquivalente, aber äußert effektive Darstellung der ebenen Welle.

Als erstes: Addiere zur Cosinusfunktion die komplexe Sinusfunktion

$i A \sin(kx - \omega t)$ :

$$\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + i A \sin(kx - \omega t) \quad (15.7)$$

$$= A [\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)] \quad (15.8)$$

Damit haben wir eine reelle Funktion 15.6 in eine komplexe Funktion 15.8 umgewandelt. Hierbei sorgt die **imaginäre Einheit**  $i$  dafür, dass die ebene Materiewelle komplexwertig wird und wir sie gleich als eine kompakte Exponentialfunktion darstellen können. Der Cosinusterm ist der **Realteil**  $\text{Re}(\Psi)$  und der Sinusterm ist der **Imaginärteil**  $\text{Im}(\Psi)$  der komplexwertigen Funktion  $\Psi$ . Das Gute ist, dass wir die enormen Vorteile der komplexen Schreibweise 15.8 ausnutzen und dann vereinbaren können, dass wir im Experiment nur am Realteil (also nur an dem Cosinusterm) interessiert sind. Den Imaginärteil können wir dann einfach ignorieren.

Bedenke jedoch, dass auch eine komplexwertige ebene Welle 15.8 eine **mögliche Lösung** der Schrödinger-Gleichung ist. Die meisten Lösungen  $\Psi(x, t)$  der Schrödinger-Gleichung sind **komplexwertige Wellenfunktionen**. Reellwertige Wellenfunktionen, wie in Gl. 15.6, sind dann nur ein Spezialfall.

Als nächstes, nutzen wir die **Euler-Beziehung**  $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$  aus der Mathematik, die die **komplexe Exponentialfunktion** mit Cosinus und Sinus verknüpft. In unserem Fall gilt  $\varphi = kx + \omega t$ . Schreiben wir damit unsere komplexwertige ebene Welle um:

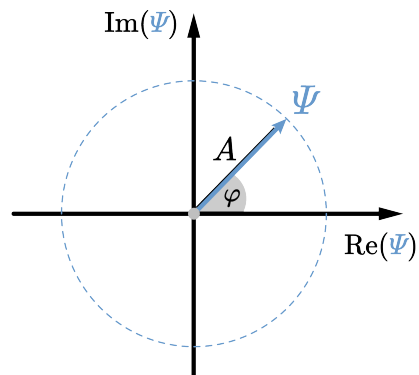
$$\Psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (15.9)$$

Immer, wenn du so einer komplexen Exponentialfunktion 15.9 begenest, dann weißt du sofort, damit wird stets eine ebene Welle beschrieben - in diesem Fall eben »hust« eine Materiewelle. Unsere ursprüngliche, reellwertige ebene Welle 15.6 als Cosinusfunktion ist in der komplexen Exponentialfunktion 15.9 **als Information enthalten**, nämlich als Realteil  $\text{Re}(\Psi)$  der Wellenfunktion.



### 15.1.3.1 Ebene Welle in der komplexen Zahlenebene

Eine derartige komplexwertige Wellenfunktion 15.9, an einem festen Ort  $x$ , können wir **in der komplexen Zahlenebene** als einen **Zeiger**  $\Psi$  (Pfeil) darstellen.



- Die **Amplitude**  $A$  entspricht der **Länge des Zeigers**.
- Das **Argument**  $kx + \omega t$  entspricht dem **Phasenwinkel**  $\varphi$ , der zwischen der reellen Achse und dem  $\Psi$ -Zeiger eingeschlossen ist. Da der Winkel sich mit der Zeit  $t$  ändert, rotiert der Zeiger im Uhrzeigersinn. Diese Rotation repräsentiert die zeitliche Ausbreitung der ebenen Welle entlang der  $x$ -Ortsachse.

Die komplexe Exponentialfunktion 15.9 ist eine **Funktion**, die eine ebene **Welle** beschreibt. Deshalb wird sie auch **Wellenfunktion**  $\Psi(x, t)$  genannt, insbesondere im Zusammenhang mit der Quantenmechanik. Manchmal sagen wir auch: Das Teilchen befindet sich **im Zustand**  $\Psi$ . Damit meinen wir ihre äquivalente Repräsentation als einen unendlich-dimensionalen Vektor (siehe Kapitel 16 über die Bra-Ket-Notation).

Es gibt natürlich verschiedenste Wellenfunktionen, die verschiedenste Teilchen unter verschiedensten Bedingungen beschreiben. Die **ebene Welle** ist nur **ein einfaches Beispiel** für eine mögliche Wellenfunktion.

Multiplizieren wir als nächstes die Gesamtenergie 15.3 mit der Wellenfunktion 15.9. Auf diese Weise **kombinieren wir den Energieerhaltungssatz und**

den Welle-Teilchen-Dualismus in einer Gleichung:

$$W \Psi = W_{\text{kin}} \Psi + W_{\text{pot}} \Psi \quad (15.10)$$

### 15.1.4 Wellengleichung

Diese Gleichung bringt uns aber noch nicht viel. Wir müssen sie noch **in eine Differentialgleichung umwandeln**. Einer ebene Welle 15.9 begegnen wir regelmäßig in der Optik und Elektrodynamik bei der Beschreibung elektromagnetischer Wellen (siehe Kapitel 14). Und von da wissen wir, dass sie eine mögliche Lösung der folgenden (eindimensionalen) Wellengleichung ist:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (15.11)$$

In unserem Fall ist  $c = \omega/k$  die **Phasengeschwindigkeit der Materiewelle**. Auf der linken Seite der Wellengleichung steht die zweite Ableitung der Wellenfunktion nach dem Ort  $x$ . Es liegt also nahe die ebene Wellenfunktion 15.9 zweimal nach  $x$  abzuleiten:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (A e^{i(kx - \omega t)}) = -k^2 A e^{i(kx - \omega t)} \quad (15.12)$$

Durch die zweimalige Ableitung bekommen wir  $i^2 k^2$  als Faktor und, wegen  $i^2 = -1$ , ein Minuszeichen. Die Wellenfunktion als Exponentialfunktion bleibt bei Ableitung - wie du hoffentlich weißt - unverändert. Die zweite Ableitung ergibt also:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \Psi \quad (15.13)$$

Als nächstes führen wir wieder auf den ersten Blick vier willkürliche Schritte durch, die uns am Ende aber zu der Schrödinger-Gleichung führen werden. In diesen Schritten wollen wir die zweite Ableitung 15.13 der Wellenfunktion mit der konstanten Gesamtenergie  $W$  des Quantenteilchens verknüpfen:

- Nutzen wir die de-Broglie-Beziehung  $p = \hbar k$  und ersetze damit  $k^2$  in der

zweiten Ableitung 15.13:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi \quad (15.14)$$

- Als nächstes bringen wir die mit dem Impuls ausgedrückte kinetische Energie  $W_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$  ins Spiel, indem wir  $p^2$  in Gl. 15.14 mit  $p^2 = 2mW_{\text{kin}}$  ersetzen:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} W_{\text{kin}} \Psi \quad (15.15)$$

- Wenn du wir nun die mit der Wellenfunktion multiplizierte Gesamtenergie 15.10 anschauen, dann sehen wir, dass dort  $W_{\text{kin}} \Psi$  vorkommt. Stellen wir daher 15.15 nach  $W_{\text{kin}} \Psi$  um:

$$W_{\text{kin}} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (15.16)$$

- Wenn wir nur noch Gl. 15.16 in die mit der Wellenfunktion multiplizierte Gesamtenergie 15.10 einsetzen, bekommen wir die **zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung in einer Raumdimension** heraus:

$$W \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + W_{\text{pot}} \Psi \quad (15.17)$$

Die **Eindimensionalität** der Schrödinger-Gleichung 15.17 erkennen wir daran, dass hier nur die **Ableitung nach einer einzigen Ortskoordinate  $x$**  vorkommt. Und die **Zeitunabhängigkeit** der Schrödinger-Gleichung erkennen wir daran, dass in ihr **eine konstante Gesamtenergie  $W$**  vorkommt. Die Wellenfunktion  $\Psi(x, t)$  in der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung darf aber natürlich zeitabhängig sein!

**Fassen wir mal zusammen:** Um die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung `refeq:timeindependent-schrodinger-equation` herzuleiten, haben wir zwei fundamentale Prinzipien gebraucht, den **Energieerhaltungssatz** 15.3 und den **Welle-Teilchen-Dualismus** 15.4, den wir mithilfe einer ebenen Materiewelle 15.9 eingeführt haben. Und da wir von dem

Energieerhaltungssatz ausgegangen sind, wird die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung auch als **Energieerhaltungssatz der Quantenmechanik** bezeichnet.

## 15.2 Interpretation der Wellenfunktion

Nehmen wir an, dass wir die Schrödinger-Gleichung gelöst haben und dadurch eine konkrete Wellenfunktion gefunden haben. Wie genau wir das angestellt haben, ist erst einmal egal. Die gefundene Wellenfunktion kann außerdem auch noch komplexwertig sein. Dabei dürfen wir den imaginären Anteil nicht vernachlässigen, wie wir es zu Beginn mit unserer ebenen Welle vereinbart haben. Durch das Weglassen des Imaginärteils würde das Ergebnis der Schrödinger-Gleichung nicht mehr mit den Ergebnissen von Experimenten übereinstimmen. Für einen Experimentator sind solche **komplexen Funktionen jedoch ungünstig**, da sie **nicht direkt messbar** sind. Außerdem **existiert noch keine direkte Interpretation der Wellenfunktion**. Doch wie können wir die berechnete Wellenfunktion trotzdem im Experiment nutzen, obwohl die komplexe Wellenfunktion nicht direkt messbar ist?

Hier kommt die vorherrschende **statistische Interpretation der Wellenfunktion** ins Spiel, die sogenannte **Kopenhagener Deutung**. Sie sagt zwar nicht, was die Wellenfunktion  $\Psi(x,t)$  bedeutet, aber sie **interpretiert ihr Betragsquadrat**  $|\Psi(x,t)|^2$ . Durch die Bildung des Betragsquadrats erhalten wir eine **reellwertige** (für den Experimentator messbare) Funktion  $|\Psi|^2$ .

Die statistische Interpretation nutzt die mathematische Tatsache aus, dass das **Betragsquadrat immer positiv** ist  $|\Psi|^2 > 0$  und interpretiert es als **Wahrscheinlichkeitsdichte**. Denn wie du weißt: Wahrscheinlichkeiten sind stets positiv.

- Im eindimensionalen Fall ist das Betragsquadrat  $|\Psi|^2$  eine **Wahrscheinlichkeit pro Länge**.
- Im dreidimensionalen Fall ist das Betragsquadrat  $|\Psi|^2$  eine

Wahrscheinlichkeit pro Volumen.

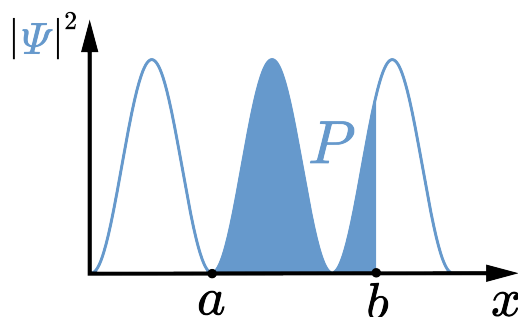
### 15.2.1 Aufenthaltswahrscheinlichkeit

Bleiben wir beim einfachen eindimensionalen Fall. Integrieren wir die Wahrscheinlichkeitsdichte  $|\Psi(x,t)|^2$  über den Ort  $x$  und zwar innerhalb der Strecke zwischen den Punkten  $x = a$  und  $x = b$ , dann bekommen wir eine **Wahrscheinlichkeit**  $P(t)$  heraus:

$$P(t) = \int_a^b |\Psi(x,t)|^2 dx \quad (15.18)$$

Das Integral der Wahrscheinlichkeitsdichte  $|\Psi(x,t)|^2$  gibt an, **mit welcher Wahrscheinlichkeit**  $P(t)$ , **sich das Teilchen im Bereich zwischen**  $a$  **und**  $b$  **zum Zeitpunkt**  $t$  **befindet**. Man spricht in diesem Zusammenhang von der **Aufenthaltswahrscheinlichkeit**  $P(t)$  **des Teilchens**. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit kann sich im Allgemeinen mit der Zeit verändern.

### 15.2.2 $|\Psi|^2$ graphisch



Wenn wir das Betragsquadrat  $|\Psi(x,t)|^2$  in Abhängigkeit vom Ort  $x$  **in einem Diagramm aufzeichnen**, dann können wir daraus folgende Informationen herauslesen:

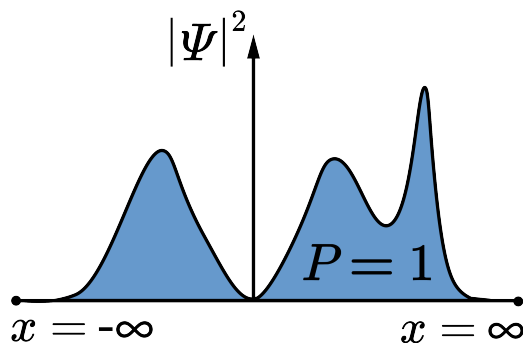
- Die Wahrscheinlichkeit  $P(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  ist die **Fläche unter der**  $|\Psi|^2$ -**Kurve**.

- Am **wahrscheinlichsten** ist es das Teilchen an den **Maxima** der  $|\psi|^2$ -Kurve zu finden.
  
- Am **unwahrscheinlichsten** ist es das Teilchen an den **Minima** der  $|\psi|^2$ -Kurve finden.

Beachte jedoch, dass es nicht möglich ist, die Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $P(t)$  des Teilchens **an einem bestimmten Ort** anzugeben (zum Beispiel bei  $x = a$ ), sondern **nur für einen Raumbereich** (hier zwischen  $x = a$  und  $x = b$ ). Im Fall eines einzigen Raumpunkts wäre das Integral 15.18 Null. Das wäre der mathematische Grund. Der physikalische Grund, warum wir keine Aufenthaltswahrscheinlichkeit für einen einzigen Punkt angeben können, ist dass es unendlich viele Raumpunkte auf der Strecke zwischen  $a$  und  $b$  gibt. Wenn jeder dieser Raumpunkte eine **endliche** Aufenthaltswahrscheinlichkeit zugewiesen bekommen hätte, dann wäre die Summe (also das Integral 15.18) aller Aufenthaltswahrscheinlichkeiten unendlich, was überhaupt keinen Sinn ergäbe. Deshalb berechnen wir stets die Aufenthaltswahrscheinlichkeit **in einem Raumbereich**.

### 15.3 Normierung der Wellenfunktion

Damit die statistische Interpretation kompatibel mit der Schrödinger-Gleichung ist, muss die Lösung der Schrödinger-Gleichung, also die Wellenfunktion  $\psi$  die sogenannte **Normierungsbedingung** erfüllen. Diese besagt, dass das Teilchen irgendwo im Raum **existieren muss**. Im eindimensionalen Fall muss es also hundertprozentig irgendwo auf der Strecke zwischen  $x = -\infty$  und  $x = \infty$  zu finden sein.



Mit anderen Worten: Die Normierungsbedingung besagt, dass das Integral 15.18 für die **Aufenthaltswahrscheinlichkeit**, **integriert über den gesamten Raum**, **stets 1** ergeben muss:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (15.19)$$

Die Normierungsbedingung 15.19 ist eine **notwendige Bedingung**, die **jede physikalisch mögliche Wellenfunktion erfüllen muss**. Nach dem Lösen der Schrödinger-Gleichung, muss die herausgefundene Wellenfunktion  $\Psi(x, t)$  **mithilfe der Normierungsbedingung normiert werden**. »Normieren« heißt, dass wir das Integral 15.19 berechnen müssen und dann die Amplitude der Wellenfunktion so wählen müssen, sodass die Normierungsbedingung erfüllt ist.

Es lässt sich beweisen, dass die normierte Wellenfunktion **für alle Zeitpunkte  $t$  normiert** bleibt. Wäre dies nicht der Fall, dann wären die Schrödinger-Gleichung und die statistische Interpretation inkompatibel. Es gibt natürlich Lösungen der Schrödinger-Gleichung, wie zum Beispiel  $\Psi(x, t) = 0$ , die **nicht normierbar** sind. **Derartige Lösungen sind unphysikalisch** und wir ignorieren sie in der Quantenmechanik. Wellenfunktionen, die mit Gl. 15.19 normierbar sind, werden übrigens in der Mathematik **quadratintegrale Funktionen** genannt. Diesem Begriff wirst du im Studium auf jeden Fall begegnen.

Wenn du mit hundertprozentiger Wahrscheinlichkeit weißt, dass das Teilchen

sich zwischen  $x = a$  und  $x = b$  befindet, dann darfst du die **Integrationsgrenzen in der Normierungsbedingung 15.19 auf diesen Raumbereich reduzieren** (das kann manchmal nützlich sein, um das Integral zu lösen):

$$\int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (15.20)$$

### 15.3.1 Beispiel: Eine Wellenfunktion normieren

Ein Elektron bewegt sich von der negativen Elektrode zur positiven Elektrode eines Plattenkondensators. Die beiden Elektroden haben den Abstand  $d$  zueinander. Du hast die folgende Wellenfunktion durch das Lösen der Schrödinger-Gleichung bestimmt:

$$\Psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (15.21)$$

Unser Ziel ist es, den Faktor  $A$  so festzulegen, dass das Integral über das Betragsquadrat dieser Wellenfunktion Eins ergibt.

Du weißt mit hundertprozentiger Wahrscheinlichkeit, dass das Elektron zwischen den beiden Elektroden sein muss. Wenn wir die negative Elektrode bei  $x = 0$  und die positive bei  $x = d$  legen, dann befindet sich das Elektron irgendwo zwischen diesen beiden Punkten. Die Normierungsbedingung wird zu:

$$\int_0^d |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (15.22)$$

Als nächstes müssen wir das Betragsquadrat  $|\Psi(x, t)|^2$  bestimmen. Der Betrag der Wellenfunktion wird genauso gebildet wie der Betrag eines Vektors. Hier kommt zum ersten Mal die Mächtigkeit der komplexen Exponentialfunktion zum Vorschein. Es gilt nämlich immer:  $|e^{i\varphi}| = 1$ . Damit ist das Betragsquadrat



gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 |\Psi(x, t)|^2 &= |A e^{i(kx - \omega t)}|^2 & (15.23) \\
 &= A^2 |e^{i(kx - \omega t)}|^2 \\
 &= A^2
 \end{aligned}$$

Setze wir das berechnete Betragsquadrat in die Normierungsbedingung ein:

$$\int_0^d A^2 dx = 1 \quad (15.24)$$

Die Amplitude  $A$  ist unabhängig von  $x$ , also ist sie eine Konstante und wir können sie vor das Integral ziehen. Und das Integral ergibt einfach  $d$ .

$$\begin{aligned}
 A^2 \int_0^d 1 dx &= 1 & (15.25) \\
 A^2 d &= 1 \\
 A &= \frac{1}{\sqrt{d}}
 \end{aligned}$$

Die **normierte Wellenfunktion** für das Elektron lautet also:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{d}} e^{i(kx - \omega t)} \quad (15.26)$$

Sobald wir die Wellenfunktion eines Quantenteilchens normiert haben, können wir daraus nicht nur die Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $P(t)$  eines Teilchens herausfinden, sondern auch den **Mittelwert**  $\langle x \rangle$  **des Ortes** und den Mittelwert von vielen anderen Observablen (physikalischen Größen). Zum Beispiel den Mittelwert des Impulses  $\langle p \rangle$ , der Geschwindigkeit  $\langle v \rangle$  oder der kinetischen Energie  $\langle W_{\text{kin}} \rangle$  eines Quantenteilchens.

## 15.4 Dreidimensionale Schrödinger-Gleichung

In deinem Physikstudium wirst du natürlich nicht nur einer eindimensionalen Schrödinger-Gleichung, sondern auch zwei- oder dreidimensionalen Version

begegnen. Die **dreidimensionale Wellenfunktion** kann dabei nicht nur von einer Ortskoordinate  $x$  abhängen, sondern **von drei Ortskoordinaten**:  $\Psi(x, y, z, t)$ . Wir können die drei Ortskoordinaten etwas kompakter zu einem Ortsvektor  $\mathbf{r}$  zusammenfassen:  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ .

Wir können die eindimensionale Schrödinger-Gleichung 15.17 zu einer dreidimensionalen Schrödinger-Gleichung verallgemeinern. Das ist nicht schwer, wenn du das Kapitel 5 über den Nabla-Operator gelesen hast. Hier ist nochmal die eindimensionale Schrödinger-Gleichung:

$$W \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + W_{\text{pot}} \Psi \quad (15.27)$$

In ihr müssen wir die zweite Ortsableitung nach  $x$  ergänzen, sodass in der dreidimensionalen Schrödinger-Gleichung auch die zweite Ortsableitung nach  $y$  und nach  $z$  vorkommen. Dazu addieren wir einfach die zweiten Ortsableitungen nach  $y$  und  $z$  zur der Ortsableitung nach  $x$  hinzu. Dann bekommen wir die **dreidimensionale, zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung** heraus:

$$W \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + W_{\text{pot}} \Psi \quad (15.28)$$

Wir können Gl. 15.28 noch etwas **kompakter mit dem Nabla-Operator** schreiben. Klammere dazu die Wellenfunktion aus den Ortsableitungen aus:

$$W \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi + W_{\text{pot}} \Psi \quad (15.29)$$

Die Summe der Ortsableitungen in der Klammer bilden einen sogenannten **Laplace-Operator**  $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$  (manchmal auch als  $\Delta$  notiert). Dieser Operator ist das Skalarprodukt zweier Nabla-Operatoren. Damit bekommen wir **dreidimensionale Schrödinger-Gleichung mit Nabla-Operator**

ausgedrückt:

$$W \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + W_{\text{pot}} \Psi \quad (15.30)$$

Bis jetzt haben wir nur die **zeitunabhängige** Schrödinger-Gleichung kennengelernt. Diese wirst du regelmäßig in der Quantenmechanik-Vorlesung benutzen müssen. Zum Beispiel bei solchen Problemen wie »Teilchen im Potentialtopf«, »quantenmechanischer harmonischer Oszillator«, »Tunneleffekt« und »Helium-Atom«.

## 15.5 Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

Ein Quantenteilchen, das durch die **zeitunabhängige** Schrödinger-Gleichung beschrieben wird, hat eine konstante Gesamtenergie  $W$ . Wir können also mit der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung nur **Quantenteilchen beschreiben, die ihre Gesamtenergie nicht verändern**.

Doch was ist, wenn die Gesamtenergie  $W$  eines Quantenteilchens **nicht zeitlich konstant** ist? Das kann beispielsweise passieren, wenn das Teilchen **mit seiner Umgebung wechselwirkt** und dadurch seine Gesamtenergie zu- oder abnimmt. Für ein derartiges Quantensystem brauchen wir die **zeitabhängige Schrödinger-Gleichung**. So sieht sie in einer Raumdimension aus:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + W_{\text{pot}} \Psi \quad (15.31)$$

Der einzige Unterschied zur zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung ist, dass die **Gesamtenergie  $W$  zu einem Operator  $W = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$**  wird. Dieser wird auch **Zeitentwicklungsoperator** genannt.

## 15.6 Stationäre Wellenfunktion

Das Lösen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung 15.31 ist gar nicht so einfach. Du kannst aber das Lösen dieser partiellen Differentialgleichung

deutlich vereinfachen, wenn du sie **in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen** umwandelst. Eine Differentialgleichung ist dann nur von der Zeit  $t$  abhängig und die andere nur vom Ort  $x$ . Diese Aufteilung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen machen wir mit der Methode »**Variablenseparation**«. Das ist eine sehr wichtige Methode in der Physik, um partielle Differentialgleichungen zu vereinfachen und leichter lösen zu können.

Die einzige Voraussetzung, damit die Variablenseparation funktioniert, ist, dass die **potentielle Energie**  $W_{\text{pot}}(x)$  **nicht von der Zeit  $t$  abhängt** (sie kann aber sehr wohl vom Ort  $x$  abhängen). Die Wellenfunktion selbst, kann natürlich weiterhin sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängen.

Als erstes, teile die zeitabhängige Wellenfunktion  $\Psi(x, t)$  (also die **Gesamtlösung**) in zwei Anteile auf:

- In eine **Teillösung**  $\psi(x)$ , die nur vom Ort  $x$  abhängt.
- In eine **Teillösung**  $\phi(t)$ , die nur von der Zeit  $t$  abhängt.

Durch diesen **Separationsansatz** (auch **Produktansatz** genannt) wird die Gesamtwellenfunktion zu einem Produkt der beiden Teillösungen:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \phi(t) \quad (15.32)$$

Damit wird die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung zu:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi(x) \phi(t)) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\psi(x) \phi(t)) + W_{\text{pot}} \psi(x) \phi(t) \quad (15.33)$$

Nicht alle Wellenfunktion lassen sich derart wie in Gl. 15.32 in zwei Teillösungen separieren. Da die Schrödinger-Gleichung aber **linear** ist, können wir eine Linearkombination derartiger Lösungen bilden und so **alle** Wellenfunktionen (auch diejenigen, die sich nicht separieren lassen) erhalten. Das macht die Variablenseparation so mächtig.

Wie du an der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung 15.31 siehst, kommen

dort die Zeitableitung und die zweite Ortsableitung vor. Rechne die beiden Ableitungen (beachte dabei die Produktregel beim Ableiten), von dem Separationsansatz 15.32 aus. Dadurch erhältst du zwei Gleichungen:

- Leite die separierte Wellenfunktion 15.32 einmal nach der Zeit  $t$  ab:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \psi(x) \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \quad (15.34)$$

- Leite die separierte Wellenfunktion 15.32 einmal nach dem Ort  $x$  ab:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \phi(t) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \quad (15.35)$$

Die Zeitableitung 15.34 und die Ortsableitung 15.35 können wir in die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung 15.33 einsetzen:

$$i\hbar \psi(x) \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \phi(t) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + W_{\text{pot}} \psi(x) \phi(t) \quad (15.36)$$

Lassen wir im Folgenden die Orts- und Zeitabhängigkeitenangabe weg, um die Schrödinger-Gleichung etwas kompakter schreiben zu können. Jetzt müssen wir die separierte Schrödinger-Differentialgleichung 15.36 so umformulieren, dass ihre linke Seite nur von der Zeit  $t$  und ihre rechte Seite nur vom Ort  $x$  abhängt. Das erreichen wir, indem wir Gl. 15.36 durch das Produkt  $\psi \phi$  dividieren:

$$i\hbar \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + W_{\text{pot}} \quad (15.37)$$

Was haben wir davon? Ganz viel! Wenn wir die Zeit  $t$  (die **nur auf der linken** Seite vorkommt) verändern, wird sich nur die linke Seite der Gleichung verändern, während die rechte Seite unverändert bleibt. Wenn sich aber die rechte Seite mit der Zeit nicht verändert, so ist sie konstant. Diese Konstante ist reell, da eine komplexwertige Konstante die Normierungsbedingung verletzen

würde. Die rechte Seite entspricht der zeitlich konstanten Gesamtenergie  $W$ :

$$i\hbar \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = W \quad (15.38)$$

Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Teillösung  $\psi(x)$ . Wir können sogar die Lösung für diese Differentialgleichung direkt angeben. Sie ist leicht mit Bleistift und Papier lösbar. Die **zeitabhängige Teillösung ist eine ebene Welle**:

$$\psi(x) = e^{i\frac{W}{\hbar}t} \quad (15.39)$$

Schauen wir uns nun die rechte Seite von Gl. 15.37 an. Wenn du auf der rechten Seite den Ort  $x$  veränderst, bleibt die linke Seite der Gleichung konstant, weil sie unabhängig von  $x$  ist. Wegen der Gleichheit, muss die linke Seite der gleichen Konstanten  $W$  entsprechen:

$$W = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + W_{\text{pot}} \quad (15.40)$$

Wenn wir die Differentialgleichung 15.40 mit  $\psi$  multiplizieren, bekommen wir die **stationäre, zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für  $\psi$**  heraus:

$$W \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + W_{\text{pot}} \psi \quad (15.41)$$

Mit »stationär« ist gemeint, dass die Lösung  $\psi(x)$  nicht von der Zeit abhängt. Daher bezeichnen wir die Lösung  $\psi(x)$  einer stationären Schrödinger-Gleichung als **stationäre Wellenfunktion  $\psi(x)$**  bzw. als **stationären Zustand**.

Was haben wir mit dem Separationsansatz insgesamt erreicht? Statt nun eine kompliziertere zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für  $\Psi(x, t) = \psi(x) \phi(t)$  lösen zu müssen,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + W_{\text{pot}} \Psi \quad (15.42)$$

lösen wir stattdessen die stationäre Schrödinger-Gleichung 15.41 für  $\psi(x)$  und multiplizieren diese ortsabhängige Teillösung mit der zeitabhängigen Teillösung 15.39. Als Ergebnis erhalten wir die Gesamtlösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{i\frac{W}{\hbar}t} \quad (15.43)$$

Die Lösung 15.43 ist ganz besonders, denn ihr Betragsquadrat  $|\Psi(x, t)|^2$  ist zeitunabhängig! Auch alle anderen Observablen, die das Teilchen beschreiben, sind zeitunabhängig. Zum Beispiel hat ein Quantenteilchen, das durch die Wellenfunktion 15.43 beschrieben wird, einen konstanten Mittelwert der Energie  $\langle W \rangle$ , konstanten Mittelwert des Impulses  $\langle p \rangle$  und konstanten Mittelwert aller anderen Observablen.

## 15.7 Hamilton-Operator

Du wirst der zeitabhängigen und unabhängigen Schrödinger-Gleichung nicht nur in dieser Form begegnen:

$$W \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + W_{\text{pot}} \Psi \quad (15.44)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + W_{\text{pot}} \Psi \quad (15.45)$$

Wenn du die Wellenfunktion weiter ausklammerst, bekommst du:

$$W \Psi = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + W_{\text{pot}} \right) \Psi \quad (15.46)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \underbrace{\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + W_{\text{pot}} \right)}_{\hat{H}} \Psi \quad (15.47)$$

Der Operator in der Klammer heißt **Hamilton-Operator**  $\hat{H}$  (manchmal auch

**Hamiltonian** genannt):

$$\hat{H} = -\underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}}_{W_{\text{kin}}} \nabla^2 + W_{\text{pot}} \quad (15.48)$$

Der Hamilton-Operator beschreibt dabei die **Gesamtenergie eines Quantenteilchens**. Der Darstellung der Schrödinger-Gleichung mit dem Hamilton-Operator wirst du ebenfalls regelmäßig im Studium begegnen:

$$\hat{H} \Psi = W \Psi \quad (15.49)$$

$$\hat{H} \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (15.50)$$

Mit dem Hamilton-Operator können wir die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung als eine **Eigenwertgleichung** interpretieren. Was eine Eigenwertgleichung ist, solltest du aus der linearen Algebra kennen. Du wendest also den Hamilton-Operator (stell dir diesen als **Matrix** vor) auf die **Eigenfunktion**  $\Psi$  an (stell dir diese als **Eigenvektor** vor). Dann bekommst du auf der rechten Seite der Schrödinger-Gleichung unverändert wieder den Eigenvektor  $\Psi$  heraus, der mit dem dazugehörigen Energieeigenwert  $W$  skaliert ist. Die Energieeigenwerte  $W$  sind abhängig vom verwendeten Hamilton-Operator  $\hat{H}$  und sind für die meisten Hamilton-Operatoren, denen du im Studium begegnen wirst, **diskret**. Wir sagen: Die Energie des Quantenteilchens ist quantisiert.

Damit haben wir das **Lösen der Schrödinger-Differentialgleichung** 15.47 auf das **Lösen des Eigenwertproblems** 15.50 übertragen.

## 15.8 Was du mitnehmen sollst

Fassen wir zusammen, was du aus dem Kapitel 15 mitgenommen haben solltest:

- Du weißt nun, wie man die **zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung motiviert**.
- Du weißt, **was die Wellenfunktion ist** und hast die ebene Welle als ein



einfaches **Beispiel für eine Wellenfunktion** kennengelernt.

- Du kennst die **statistische Interpretation** der Wellenfunktion.
- Du kannst eine **Wellenfunktion normieren**.
- Du kennst den **Unterschied zwischen der zeitabhängigen und zeitunabhängigen** Schrödinger-Gleichung.
- Du kennst den **Unterschied zwischen der eindimensionalen und dreidimensionalen** Schrödinger-Gleichung.
- Du weißt, was der **Hamilton-Operator** ist.
- Du weißt, was eine **stationäre Wellenfunktion** ist.

Bedenke, dass die Schrödinger-Gleichung eine **nicht-relativistische Gleichung**. Sie versagt für Quantenteilchen, die sich fast mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Außerdem berücksichtigt sie nicht auf natürliche Weise den Spin eines Teilchens. Diese beiden Probleme werden erst durch ihre relativistische Version gelöst, nämlich durch die **Dirac-Gleichung**. Diese lernst du erst im Masterstudium kennen, wenn du Quantenfeldtheorie belegst.

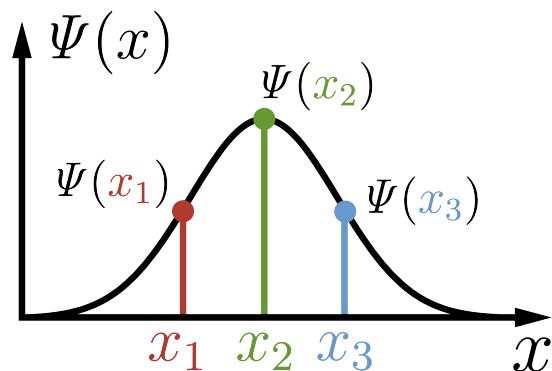
Im nachfolgenden Kapitel 16 lernst du die **Darstellung der Wellenfunktion als einen (unendlich-dimensionalen) Zustandsvektor** (»quantenmechanischer Zustand« genannt). Vorteil: Du kannst mit dem Zustandsvektor (fast) genauso herumhantieren, wie mit üblichen Vektoren, die du aus der linearen Algebra kennst.



# 16. Bra-Ket-Notation

**Mehr:** [de.fufaev.org/bra-ket-notation](http://de.fufaev.org/bra-ket-notation)

Betrachte irgendeine **eindimensionale Wellenfunktion**  $\Psi(x)$ , die ein quantenmechanisches Teilchen beschreibt. Wir haben ihre Zeitabhängigkeit  $\Psi(t, x)$  weggelassen, weil sie in diesem Kapitel nicht relevant ist. Der Wert der Wellenfunktion, beispielsweise am Ort  $x_1$  ist  $\Psi(x_1)$ , am Ort  $x_2$  ist der Funktionswert  $\Psi(x_2)$ , am Ort  $x_3$  ist der Funktionswert  $\Psi(x_3)$  und so weiter. Du kannst auf diese Weise, anschaulich gesagt, jedem Raumpunkt  $x$  den Funktionswert  $\Psi(x)$  der Wellenfunktion zuweisen. Die Summe all dieser Funktionswerte ergibt den räumlichen Verlauf der Wellenfunktion.



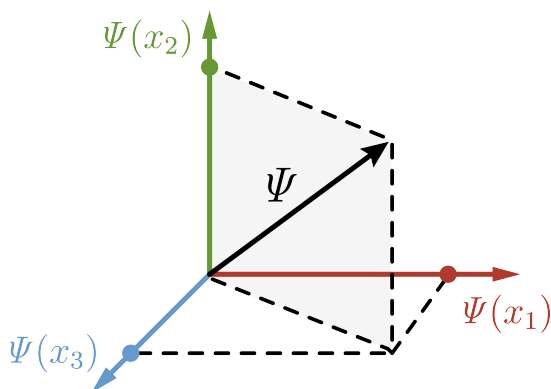
Wir können dann die ganzen Funktionswerte als eine Liste von Werten darstellen. Diese Liste von Werten können wir als einen **Spaltenvektor**  $\Psi$  auffassen. Der Spaltenvektor hat dann die Komponenten:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi(x_1) \\ \Psi(x_2) \\ \Psi(x_3) \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (16.1)$$

Beim zweiten Gleichheitszeichen haben wir die Funktionswerte etwas kürzer dargestellt. Statt also die erste Komponente  $\Psi(x_1)$  zu schreiben, schreiben wir sie kompakt als  $\Psi_1$ .

Wir können den Spaltenvektor 16.1 veranschaulichen:

- Die erste Komponente  $\Psi(x_1)$  bildet die erste Koordinatenachse.
- Die zweite Komponente  $\Psi(x_2)$  bildet die zweite Koordinatenachse.
- Die dritte Komponente  $\Psi(x_3)$  bildet die dritte Koordinatenachse.
- und so weiter.



Wir bleiben bei nur drei Komponenten, weil ich kein vierdimensionales Koordinatensystem zeichnen kann. Jede Komponente bekommt also eine Koordinatenachse zugewiesen. Auf diese Weise spannen die drei Komponenten einen **dreidimensionalen Raum** auf. Sobald wir noch einen

zusätzlichen Funktionswert  $\Psi(x_4)$  dazu nehmen, wird der Raum **vierdimensional** und so weiter. Den Vektor  $\Psi$ , der eine Wellenfunktion  $\Psi(x)$  repräsentiert, bezeichnen wir als **Zustandsvektor**.

Theoretisch gibt es natürlich **unendlich viele  $x$ -Werte**. Deshalb gibt es auch **unendlich viele dazugehörige Funktionswerte**  $\Psi(x)$  als Komponenten des Spaltenvektors. Wenn es unendlich viele Funktionswerte gibt, dann ist der Raum, in dem der Zustandsvektor  $\Psi$  lebt, **unendlich-dimensional**. Denk dran, dass dieser Raum kein unendlich-dimensionaler **Ortsraum**, sondern ein **abstrakter Raum** ist.

Dieser abstrakte Raum, in dem verschiedenste quantenmechanische Zustandsvektoren  $\Psi$  leben, heißt **Hilbertraum**. Im Allgemeinen ist das ein unendlich-dimensionaler Vektorraum. Er kann aber auch **endlich-dimensional** sein. Die Spinzustände  $\Psi_\uparrow$  und  $\Psi_\downarrow$ , die den Spin eines Teilchens beschreiben, leben beispielsweise in einem **zweidimensionalen Hilbertraum**. Das heißt: Die Zustandsvektoren wie der Spin-up-Zustand  $\Psi_\uparrow$  haben **nur zwei Komponenten**:

$$\Psi_\uparrow = \begin{bmatrix} \Psi_{\uparrow 1} \\ \Psi_{\uparrow 2} \end{bmatrix} \quad (16.2)$$

Aber selbst einen **unendlich-dimensionalen Zustand mit einem Spaltenvektor 16.1 anzunähern**, ist super nützlich: Bei den numerischen Berechnungen haben wir keine andere Wahl als den unendlich-dimensionalen Zustand durch endlich viele Funktionswerte anzunähern. Anders geht es ja nicht, denn dafür bräuchte dein Computer unendlich viel Speicher. Je mehr Komponenten man in der numerischen Berechnung nimmt, desto genauer wird der Zustandsvektor, aber desto langsamer und speicherintensiver werden die Berechnungen.

Wir können also ein quantenmechanisches Teilchen auf zwei Arten darstellen:

- als Wellenfunktion  $\Psi(x)$
- als Zustandsvektor  $\Psi$

## 16.1 Bra- and Ket-Zustandsvektoren

### 16.1.1 Ket-Vektor

Um die Beschreibung des Teilchens als Zustandsvektor besser von der Beschreibung als Wellenfunktion unterscheiden zu können, schreiben wir den Zustandsvektor  $\Psi$  in eine pfeilartige Klammer:

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (16.3)$$

Die **Wellenfunktion**  $\Psi$ , die als **Spaltenvektor** 16.3 dargestellt wird, heißt **Ket-Vektor**  $|\Psi\rangle$  und die pfeilartige Klammer zeigt nach rechts. Es spielt keine Rolle, was du **innerhalb** der Klammer schreibst. Du hättest zum Beispiel den Ket-Vektor auch als  $|\Psi(x)\rangle$  notieren können. Das Einzige, was du beachten musst, ist, dass die Schreibweise innerhalb der Klammer den anderen Lesern klar macht, welches quantenmechanische System dieser Ket-Vektor repräsentiert.

- Wenn du also einen **Ket**  $|\Psi\rangle$  siehst, dann weißt du, dass damit die Darstellung des Quantenteilchens **als Zustandsvektor** gemeint ist.
- Wenn du dagegen  $\Psi(x)$ , ohne Ket-Notation siehst, dann weißt du, dass damit die Darstellung des Quantenteilchens **als Wellenfunktion** gemeint ist.

### 16.1.2 Bra-Vektor

Der Vektor  $|\Psi\rangle^\dagger$ , der dem Ket-Vektor **adjungiert** ist, heißt **Bra-Vektor**. Das Symbol  $\dagger$  wird als »Dagger« ausgesprochen (englisch für: Dolch). Für eine clevere, kompakte Schreibweise schreiben wir den Bra-Vektor mit einem **umgekehrten Pfeil**  $\langle\Psi|$  statt mit dem Dagger  $|\Psi\rangle^\dagger$ .

Um den Bra-Vektor  $\langle\Psi|$  adjungiert zum Ket-Vektor  $|\Psi\rangle$  zu erhalten, müssen wir zwei Operationen durchführen:

- **Transponiere** den Ket-Vektor  $|\Psi\rangle$ . Dadurch wird er zu einem Zeilenvektor:

$$|\Psi\rangle^T = [\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \dots] \quad (16.4)$$

- **Komplex-konjugiere** den transponierten Ket-Vektor  $|\Psi\rangle^T$ . Diese Operation fügt den Komponenten »Sternchen« hinzu, um den Bra-Vektor zu erhalten:

$$\langle\Psi| = [\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \dots] \quad (16.5)$$

Fassen wir zusammen: Die Wellenfunktion  $\Psi(x)$  entspricht in der Vektordarstellung dem Ket-Vektor  $|\Psi\rangle$  und der zum Ket-Vektor **adjungierte Zeilenvektor**  $\langle\Psi|$  ist der **Bra-Vektor**.

Da wir die Wellenfunktion  $\Psi(x)$  als Ket-Vektor  $|\Psi\rangle$  interpretiert haben, können wir mit dem Ket-Vektor praktisch auf die gleiche Weise arbeiten wie mit gewöhnlichen Vektoren, die du aus der linearen Algebra kennst. Zum Beispiel können wir ein **Skalarprodukt** oder ein **Tensorprodukt zwischen den Bra- oder Ket-Vektoren bilden**. Was für Dich wahrscheinlich neu ist, ist, dass im Gegensatz zu den Vektoren aus der linearen Algebra die **Komponenten des Ket-Vektors komplex** sein können und die **Anzahl der Komponenten unendlich** sein kann.

## 16.2 Skalar- und inneres Produkt

Wir können das **Skalarprodukt**  $\langle\Phi| \cdot |\Psi\rangle$  zwischen einem Bra-Vektor  $\langle\Phi|$  und einem Ket-Vektor  $|\Psi\rangle$  bilden. Hier brauchen wir den Skalarprodukt-Punkt nicht zu notieren und können eine vertikale Linie weglassen. Wir schreiben kürzer  $\langle\Phi|\Psi\rangle$  anstelle von  $\langle\Phi| \cdot |\Psi\rangle$ .

Wenn die Zustandsvektoren, zwischen denen man das Skalarprodukt bildet, **in einem unendlich dimensionalen Hilbertraum** leben, dann nennen wir diese Operation nicht Skalarprodukt, sondern **inneres Produkt**. Die Schreibweise  $\langle\Phi|\Psi\rangle$  des inneren Produkts bleibt jedoch dieselbe wie im Fall

des Skalarprodukts.

In einem endlichen  $n$ -dimensionalen Hilbertraum sieht das ausgeschriebene Skalarprodukt  $\langle \Phi | \Psi \rangle$  zwischen einem beliebigen Bra-Vektor  $\langle \Phi |$  und einem Ket-Vektor  $|\Psi\rangle$  wie folgt aus:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = [\Phi_1^*, \Phi_2^*, \Phi_3^*, \dots, \Phi_n^*] \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \dots \\ \Psi_n \end{bmatrix} \quad (16.6)$$

Wir können den Zeilen- und Spaltenvektor in 16.6 genauso ausmultiplizieren, wie wir es bei der üblichen Matrixmultiplikation machen:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \Phi_1^* \Psi_1 + \Phi_2^* \Psi_2 + \Phi_3^* \Psi_3 + \dots + \Phi_n^* \Psi_n \quad (16.7)$$

$$= \sum_{i=1}^n \Phi_i^* \Psi_i \quad (16.8)$$

Im letzten Schritt haben wir das Skalarprodukt **mit einem Summenzeichen kürzer geschrieben**. Dabei ist  $n$  die **Dimension des Hilbertraums**, das heißt die **Anzahl der Komponenten** eines Zustandsvektors, der in diesem Hilbertraum lebt. Die Dimension  $n = \infty$  des Hilbertraums kann auch unendlich sein.

## 16.3 Kontinuierliche Quantenzustände

Wir haben bis jetzt einen Quantenzustand  $|\Psi\rangle$  diskret gemacht, indem wir viele Funktionswerte der Wellenfunktion  $\Psi(x)$  weggelassen haben. Allein schon zwischen den Orten  $x_1$  und  $x_2$  existieren **unendlich viele weitere Werte**. Die Ortskoordinate ist schließlich eine reelle Zahl. Damit gibt es unendlich viele Komponenten zwischen  $\Psi_1 = \Psi(x_1)$  und  $\Psi_2 = \Psi(x_2)$ , die wir in der



Spaltenvektor-Darstellung weggelassen haben:

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \dots \\ \Psi_2 \\ \dots \\ \Psi_3 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (16.9)$$

Damit will ich sagen, dass die Darstellung einer Wellenfunktion mit **reellwertigem Argument**  $x$  als Spaltenvektor nur eine Näherung ist und dient lediglich der Veranschaulichung.

Auch das innere Produkt 16.8 mit dem Summenzeichen ist für Zustände mit reellwertigen Argumenten nicht exakt. Wie können wir das innere Produkt für diese Zustände **exakt machen**? Wir müssen **zu einem Integral übergehen**. Wir ersetzen daher das Summenzeichen durch ein Integralzeichen. Die Funktionswerte  $\Phi_i$  und  $\Psi_i$  betrachten wir jetzt natürlich nicht an diskreten Punkten  $x_i$ , sondern an allen Punkten  $x$ :

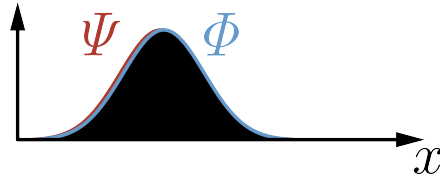
$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int \Phi(x)^* \Psi(x) dx \quad (16.10)$$

Um also das **exakte innere Produkt zweier Wellenfunktionen**  $\Phi(x)$  und  $\Psi(x)$  zu berechnen, müssen wir das Integral 16.10 berechnen.

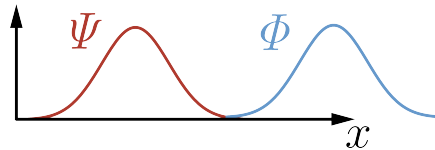
### 16.3.1 Überlapp der Quantenzustände

Was sagt eigentlich dieses innere Produkt von zwei Quantenzuständen anschaulich aus? Das innere Produkt ist genauso wie das Skalarprodukt eine Zahl, die misst, **wie stark sich zwei Quantenzustände überlappen**. Betrachten wir einfachheitshalber zwei normierte Quantenzustände  $\Phi$  und  $\Psi$ :

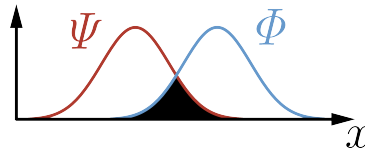
- Wenn das innere Produkt  $\langle \Phi | \Psi \rangle = 1$  ist, dann liegen die entsprechenden Wellenfunktionen  $\Phi(x)$  und  $\Psi(x)$  **genau übereinander**.



- Wenn das innere Produkt  $\langle \Phi | \Psi \rangle = 0$  ist, dann **überlappen** sich die Wellenfunktionen  $\Phi(x)$  und  $\Psi(x)$  **gar nicht**.



- Alle Werte des inneren Produkts  $\langle \Phi | \Psi \rangle$  zwischen 1 und 0 ergeben nur eine **teilweise Überlappung** der beiden Wellenfunktionen.



## 16.4 Orthonormierte Quantenzustände

Nehmen wir zwei **normierte und orthogonale** (also orthonormierte) Zustände  $|\Psi_i\rangle$  und  $|\Psi_j\rangle$  und versehen sie mit variablen Indizes  $i$  und  $j$  statt mit festen Werten, dann ergibt deren Skalarprodukt  $\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle$  entweder 0 oder 1. Sie kommen also als **Basiszustände** in Frage. Diese Eigenschaft kennst du aus der linearen Algebra, wenn du das Skalarprodukt zweier Basisvektoren bildest:

- Das Skalarprodukt von zwei **verschiedenen** orthonormalen Zuständen,  $i \neq j$ , ergibt:  $\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = 0$ .
- Das Skalarprodukt von zwei **gleichen**, orthonormalen Zuständen,  $i = j$ , ergibt:  $\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = 1$ .

Diese zwei Fälle können **in einer einzigen Gleichung mithilfe des**

Kronecker-Deltas  $\delta_{ij}$  kombiniert werden:

$$\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (16.11)$$

## 16.5 Tensorprodukt in Bra-Ket-Notation

Eine weitere wichtige Operation zwischen einem Bra- und Ket-Vektor ist das **Tensorprodukt**:  $|\Phi\rangle \otimes \langle\Psi|$ . Wir können das **Tensorsymbol**  $\otimes$  **weglassen**, weil aus der Bra-Ket-Notation sofort ersichtlich ist, dass es sich nicht um ein Skalar- oder inneres Produkt handelt:  $|\Phi\rangle\langle\Psi|$ , denn **Bra- und Ket-Vektoren sind hier vertauscht**.

Das **Ergebnis des Tensorprodukts ist eine Matrix**:

- Wenn die Zustände  $|\Phi\rangle$  und  $|\Psi\rangle$  jeweils **zwei Komponenten** haben, dann ist  $|\Phi\rangle\langle\Psi|$  eine **2x2-Matrix**.
- Wenn die Zustände  $|\Phi\rangle$  und  $|\Psi\rangle$  jeweils **drei Komponenten** haben, dann ist  $|\Phi\rangle\langle\Psi|$  eine **3x3-Matrix**.
- Wenn die Zustände  $|\Phi\rangle$  und  $|\Psi\rangle$  jeweils  $n$  **Komponenten** haben, dann ist  $|\Phi\rangle\langle\Psi|$  eine  $n \times n$ -**Matrix**.

Wie du von der Matrixmultiplikation kennst, multiplizieren wir beim Tensorprodukt einen Ket-Vektor  $|\Phi\rangle$ , der ein Spaltenvektor ist, mit einem Bra-Vektor  $\langle\Psi|$ , der ein Zeilenvektor ist. Wenn die Zustände drei Komponenten haben, dann ergibt sich eine 3x3-Matrix:

$$|\Phi\rangle\langle\Psi| = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} [\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*] = \begin{bmatrix} \Phi_1 \Psi_1^* & \Phi_1 \Psi_2^* & \Phi_1 \Psi_3^* \\ \Phi_2 \Psi_1^* & \Phi_2 \Psi_2^* & \Phi_2 \Psi_3^* \\ \Phi_3 \Psi_1^* & \Phi_3 \Psi_2^* & \Phi_3 \Psi_3^* \end{bmatrix} \quad (16.12)$$

Derartigen Matrizen wirst du sehr oft in Form von Dichtematrizen in der Quantenmechanik begegnen, zum Beispiel, wenn du über **Quantenverschränkung** lernst.

## 16.6 Projektionsmatrizen

Nehmen wir einen **normierten Zustand**  $|\Psi\rangle$ , das heißt der Betrag dieses Vektors ist 1, und bilden das Tensorprodukt dieses Zustands mit sich selbst, dann bekommen wir eine **Projektionsmatrix**  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$  (oder **Projektionsoperator**, wenn keine konkreten Komponenten betrachtet werden):

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix} [\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*] = \begin{bmatrix} \Psi_1 \Psi_1^* & \Psi_1 \Psi_2^* & \Psi_1 \Psi_3^* \\ \Psi_2 \Psi_1^* & \Psi_2 \Psi_2^* & \Psi_2 \Psi_3^* \\ \Psi_3 \Psi_1^* & \Psi_3 \Psi_2^* & \Psi_3 \Psi_3^* \end{bmatrix} \quad (16.13)$$

Wenn wir sie auf irgendeinen Ket-Vektor  $|\Phi\rangle$  (der nicht normiert sein muss) anwenden, dann **multiplizieren wir eine Matrix**  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$  **mit einem Spaltenvektor**  $|\Phi\rangle$ :

$$|\Psi\rangle\langle\Psi||\Phi\rangle = |\Psi\rangle\langle\Psi|\Phi\rangle = \begin{bmatrix} \Psi_1 \Psi_1^* & \Psi_1 \Psi_2^* & \Psi_1 \Psi_3^* \\ \Psi_2 \Psi_1^* & \Psi_2 \Psi_2^* & \Psi_2 \Psi_3^* \\ \Psi_3 \Psi_1^* & \Psi_3 \Psi_2^* & \Psi_3 \Psi_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (16.14)$$

Das Besondere an einer Projektionsmatrix ist: Sie **projiziert den Zustand**  $|\Phi\rangle$  **auf den Zustand**  $|\Psi\rangle$ . Anschaulich gesagt: Sie gibt den Anteil des Quantenzustands  $|\Phi\rangle$ , der mit dem Quantenzustand  $|\Psi\rangle$  überlappt. Das Ergebnis der Projektion ist also ein **Ket-Vektor**  $|\Psi\rangle\langle\Psi|\Phi\rangle$ , **der den Überlapp der Quantenzustände**  $|\Phi\rangle$  und  $|\Psi\rangle$  beschreibt.

### 16.6.1 Basiswechsel mit den Projektionsmatrizen

Projektionsmatrizen sind ein wichtiges Werkzeug in der theoretischen Physik, um den Überlapp von Quantenzuständen genauer zu untersuchen. Doch der wohl wichtigste Nutzen von Projektionsmatrizen ist **der kinderleichte Basiswechsel**. Wenn wir irgendeinen Quantenzustand  $|\Phi\rangle$  haben und ihn **aus einer anderen Perspektive** betrachten wollen, oder mathematisch gesagt, in einer anderen Basis darstellen wollen, dann wählen wir natürlich als erstes die

**gewünschte neue Basis:**  $\{|\Psi_i\rangle\}$ . Das ist, wie du hoffentlich aus der linearen Algebra weißt, eine Menge von orthonormalen Vektoren  $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, |\Psi_3\rangle$  und so weiter. Ihre **Anzahl ist gleich der Dimension** des Hilbertraums, in dem diese Quantenzustände leben. In der Quantenmechanik bezeichnen wir die Basisvektoren als **Basiszustände**. Für die Beschreibung des Teilchenspins brauchen wir beispielsweise nur zwei Basiszustände.

Nehmen wir für die Illustration an, dass unsere gewünschte Basis nur aus drei Basiszuständen besteht:  $\{|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, |\Psi_3\rangle\}$ . Mit jedem dieser Basiszustände können wir Projektionsmatrizen konstruieren:  $|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|$ ,  $|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|$  und  $|\Psi_3\rangle\langle\Psi_3|$ .

Um einen Quantenzustand  $|\Phi\rangle$  in dieser Basis darzustellen, bilden wir als erstes die Summe der Projektionsmatrizen:

$$\sum_{i=1}^3 |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| = |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + |\Psi_3\rangle\langle\Psi_3| = \mathbb{I} \quad (16.15)$$

Wie wir aus der Mathematik wissen, ist die **Summe der Projektionsmatrizen**, die eine Basis bilden, eine **Einheitsmatrix**  $\mathbb{I}$ . Dass die Summe eine Einheitsmatrix ergibt, ist sehr wichtig beim Basiswechsel, denn wir wollen ja **nicht den Quantenzustand  $|\Phi\rangle$  verändern**. Eine Einheitsmatrix multipliziert mit einem Spaltenvektor  $|\Phi\rangle$  verändert nicht diesen Vektor:

$$|\Phi\rangle = \mathbb{I}|\Phi\rangle \quad (16.16)$$

Jetzt setzen wir die Summe der Basis-Projektionsmatrizen 16.15 für die

Einheitsmatrix ein:

$$|\Phi\rangle = \sum_{i=1}^3 |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|\Phi\rangle \quad (16.17)$$

$$= (|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + |\Psi_3\rangle\langle\Psi_3|) |\Phi\rangle \quad (16.18)$$

$$= |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\Phi\rangle + |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\Phi\rangle + |\Psi_3\rangle\langle\Psi_3|\Phi\rangle \quad (16.19)$$

$$= |\Phi\rangle \quad (16.20)$$

Der Ergebniszustand  $|\Phi\rangle$ , der zwar gleich wie der ursprüngliche Zustand  $|\Phi\rangle$  notiert ist, ist nun in der **neuen Basis**  $\{|\Psi_i\rangle\}$  **dargestellt**. Wir können ihn, wenn wir die neue Basis betonen wollen, beispielsweise auch mit einem Index versehen:  $|\Phi\rangle_\Psi$ . Ich hoffe, dass du nun begriffen hast, wie nützlich das Konzept von Projektionsmatrizen ist!

Allgemein können wir einen Quantenzustand  $|\Phi\rangle$  mit  $n$  Komponenten mit einer **Basis**  $\{|\Psi_i\rangle\}$ , **die aus  $n$  Basiszuständen besteht**, folgendermaßen vollziehen:

$$|\Phi\rangle_\Psi = \sum_{i=1}^n |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|\Phi\rangle \quad (16.21)$$

Der Basiswechsel mit einer endlichen Anzahl an Basiszuständen ist natürlich **nur exakt**, wenn die Zustände  $|\Phi\rangle$  **in einem endlich-dimensionalen** Hilbertraum leben. Für Zustände mit unendlich vielen Komponenten ist Gl. 16.21 **nur eine Näherung des alten Zustands in der neuen Basis**. Die Näherung wird umso genauer, je größer wir  $n$  wählen. So können wir in der Computerphysik Arbeitsspeicher sparen, wenn wir  $n$  nicht zu groß wählen, aber groß genug, um den Quantenzustand gut in der neuen Basis anzunähern.

Rate mal, wie der Basiswechsel für Zustände mit unendlich vielen Komponenten **exakt** gemacht werden kann? Mit einem Integral! Ersetze dazu die diskrete Summation mit einem Summenzeichen durch eine **kontinuierliche Summation mit einem Integral**:

$$|\Phi\rangle_\Psi = \int dx |\Psi\rangle\langle\Psi|\Phi\rangle \quad (16.22)$$

## 16.7 Schrödinger-Gleichung in Bra-Ket-Notation

Im Kapitel 15.7 hast du die Schrödinger-Gleichung als Eigenwertgleichung kennengelernt. Hier ist sie nochmal:

$$\hat{H} \Psi = W \Psi$$

$$\hat{H} \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Du wirst dieser Eigenwertgleichung regelmäßig in Bra-Ket-Notation begegnen. Ersetze dazu die Wellenfunktion  $\Psi$  mit dem Ket-Vektor:

$$\hat{H} |\Psi\rangle = W |\Psi\rangle \tag{16.23}$$

$$\hat{H} |\Psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle \tag{16.24}$$

## 16.8 Mittelwerte in Bra-Ket-Notation

Wir können die kennengelernte Bra-Ket-Notation nutzen, um damit den **Mittelwert**  $\langle \hat{H} \rangle$  eines **Operators**  $\hat{H}$  im **Quantenzustand**  $|\Psi\rangle$  darzustellen. Manchmal bezeichnen die Physiker den Mittelwert als **Erwartungswert** - diese Bezeichnung ist jedoch irreführend und sollte nicht für den Mittelwert  $\langle \hat{H} \rangle$  benutzt werden. Die Notation  $\langle \hat{H} \rangle$  des Mittelwerts ist eine kurze Schreibweise für  $\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$ .

Den Mittelwert einer Observable bekommen wir also, indem wir den Operator  $\hat{H}$  zwischen einem Bra-Vektor  $\langle \Psi |$  und Ket-Vektor sandwichen:

$$\langle \hat{H} \rangle = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{H} \Psi \rangle \tag{16.25}$$

Beim letzten Gleichheitszeichen haben wir ausgenutzt, dass  $\hat{H}$  angewendet auf den Ket-Vektor  $|\Psi\rangle$  einen **neuen Ket-Vektor**  $|\hat{H} \Psi\rangle$  ergibt. Du weißt ja: Das, was in  $|\ \rangle$  als Notation steht, ist irrelevant, solange es klar ist, was dieser Ket-

Vektor repräsentiert.

Nun solltest du ein solides Grundwissen über die Bra-Ket-Notation haben. Aus diesem Kapitel solltest du folgende Learnings mitgenommen haben:

- Du weißt, was Bra- und Ket-Vektoren sind.
- Du weißt, wie du damit Skalarprodukt und inneres Produkt bildest.
- Du weißt, wie du Projektionsmatrizen in Bra-Ket-Notation konstruierst.
- Du weißt, wie du mit Projektionsmatrizen einen Basiswechsel durchführst.



# 17. Operatoren als Matrizen darstellen

Wenn wir eine Basis wählen, können wir einen Operator  $\hat{H}$  **als eine Matrix  $H$  darstellen**. Zum Beispiel können wir dafür die Eigenbasis  $\{|\varphi_i\rangle\}$  von  $\hat{H}$  nehmen. Eigenbasis ist die Menge von Eigenzuständen (Eigenvektoren)  $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle, \dots$  von  $\hat{H}$ .

- Wenn der Operator  $\hat{H} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  eine Abbildung zwischen den **zweidimensionalen** Hilberträumen  $\mathbb{H}$  ist, dann hat die Eigenbasis von  $\hat{H}$  zwei Eigenzustände  $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$  und kann durch eine **2x2-Matrix** repräsentiert werden:

$$H = \begin{bmatrix} \langle \varphi_1 | \hat{H} | \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1 | \hat{H} | \varphi_2 \rangle \\ \langle \varphi_2 | \hat{H} | \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2 | \hat{H} | \varphi_2 \rangle \end{bmatrix}$$

- Wenn der Operator  $\hat{H} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  eine Abbildung zwischen den **dreidimensionalen** Hilberträumen  $\mathbb{H}$  ist, dann hat die Eigenbasis von  $\hat{H}$  drei Eigenzustände  $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle\}$  und kann durch eine **3x3-Matrix**

repräsentiert werden:

$$H = \begin{bmatrix} \langle \varphi_1 | \hat{H} | \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1 | \hat{H} | \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_1 | \hat{H} | \varphi_3 \rangle \\ \langle \varphi_2 | \hat{H} | \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2 | \hat{H} | \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2 | \hat{H} | \varphi_3 \rangle \\ \langle \varphi_3 | \hat{H} | \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_3 | \hat{H} | \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_3 | \hat{H} | \varphi_3 \rangle \end{bmatrix}$$

# 18. Hermitesche Operatoren

**Mehr:** [de.fufaev.org/hermite-operatoren](http://de.fufaev.org/hermite-operatoren)

Schauen wir uns den Mittelwert  $\langle \hat{H} \rangle$  des Operators  $\hat{H}$  im Zustand  $|\Psi\rangle$  an. Wenn  $\hat{H}$  der Hamilton-Operator ist, dann beschreibt  $\langle \hat{H} \rangle$  den **Mittelwert der Gesamtenergie** eines Quantenteilchens:

$$\langle \hat{H} \rangle = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle \quad (18.1)$$

$$= \int \Psi(x, t)^* (\hat{H} \Psi(x, t)) dx \quad (18.2)$$

Der Mittelwert einer physikalischen Größe, wie wir ihn aus dem Alltag kennen, ist eine **reelle Zahl**. In der Quantenmechanik können jedoch für manche Operatoren auch komplexe Mittelwerte auftreten. Stell dir vor, wir würden für den Ortsmittelwert  $\langle \hat{x} \rangle$  oder den Energiemittelwert  $\langle \hat{H} \rangle$  einen komplexen Wert erhalten. Das ist problematisch, denn was soll überhaupt ein komplexer Ort oder eine komplexe Energie sein?

Wir sind daher in der Quantenmechanik nur an Mittelwerten  $\langle \hat{H} \rangle$  interessiert, die reell sind. Wie können wir das mathematisch fordern? Ganz einfach! Eine reelle Zahl, zum Beispiel die Zahl 5 bleibt unverändert, wenn wir sie komplex

konjugieren:  $5 = 5^*$ . Eine komplexe Zahl, zum Beispiel  $4 + 2i$ , bleibt nicht gleich, wenn wir sie komplex konjugieren:  $(4 + 2i)^* = 4 - 2i$ .

Wenn also der **Mittelwert reell** ist, dann ist er **gleich seinem komplex konjugierten Wert**:

$$\langle \Psi | \hat{H} \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{H} \Psi \rangle^* \quad (18.3)$$

Wir bezeichnen den Operator  $\hat{H}$ , dessen Mittelwert  $\langle \hat{H} \rangle$  reell ist, als **Hermiteschen Operator**. Ein hermitescher Operator repräsentiert also eine **messbare Größe**, wie zum Beispiel den Impuls, Ort und Energie. Eine Größe, die wir in einem Experiment messen können, bezeichnen wir als **Observable** (»to observe« = »beobachten«).

Was bedeutet das konkret für das Mittelwertintegral 18.2, wenn  $\hat{H}$  ein hermitescher Operator ist? Schauen wir uns das mal an, indem wir den komplex konjugierten Mittelwert  $\langle \Psi | \hat{H} \Psi \rangle^*$  mit dem Mittelwertintegral 18.2 ausschreiben:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{H} \Psi \rangle^* &= \left( \int \Psi^* (\hat{H} \Psi) dx \right)^* & (18.4) \\ &= \left( \int (\hat{H} \Psi) \Psi^* dx \right)^* \\ &= \int (\hat{H} \Psi)^* (\Psi^*)^* dx \\ &= \int (\hat{H} \Psi)^* \Psi dx \\ &= \langle \hat{H} \Psi | \Psi \rangle \end{aligned}$$

Wir haben die folgende wichtige Eigenschaft von hermiteschen Operatoren herausgefunden:

$$\langle \Psi | \hat{H} \Psi \rangle = \langle \hat{H} \Psi | \Psi \rangle \quad (18.5)$$

Damit unsere Mittelwert-ist-reell-Forderung 18.2 erfüllt ist, muss der Operator  $\hat{H}$  im Skalarprodukt vertauscht werden können. Es darf also keine Rolle spielen, ob wir  $\hat{H}$  in der Mittelwert-Berechnung zuerst auf den Ket- oder auf den Bra-Vektor anwenden. Wenn du also weißt, dass ein Operator hermitesch ist, dann schieb den Operator in der Bra-Ket-Notation wohin du willst.

## 18.1 Nützliche Eigenschaften von Hermiteschen Operatoren

Neben der nützlichen Eigenschaft 18.5 hat ein hermitescher Operator noch einen Haufen weiterer nützlicher Eigenschaften.

Normalerweise ist es so, dass, wenn wir einen Operator  $\hat{H}$ , der auf einen Ket-Vektor wirkt, auf den Bra-Vektor verschieben wollen, müssen wir den Operator adjungieren  $\hat{H}^\dagger$ :

$$\langle \Psi | \hat{H}^\dagger \Psi \rangle = \langle \hat{H} \Psi | \Psi \rangle \quad (18.6)$$

Wie du gelernt hast, im Fall eines hermiteschen Operators müssen wir das nicht tun. Ein **hermitescher Operator ist ein selbstadjungierter Operator**:

$$\hat{H} = \hat{H}^\dagger \quad (18.7)$$

Um zu verdeutlichen, dass  $\hat{H}$  ein hermitescher Operator ist, wird der Mittelwert auch folgendermaßen notiert:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{H} \Psi \rangle &= \langle \hat{H} \Psi | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | \hat{H}^\dagger | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (18.8)$$

Ein hermitescher Operator hat noch eine weitere wichtige Eigenschaft, die du dir unbedingt für deine Quantenmechanik-Vorlesungen merken musst: Die **Menge der Eigenzustände**  $\{|\varphi_i\rangle\}$  (Eigenvektoren) eines hermiteschen Operators **kann**

als Basis benutzt werden. Diese Eigenschaft ist so wichtig, dass sie einen Namen trägt, nämlich das **Spektraltheorem**.

Verinnerliche das mal: Du hast einen hermiteschen Operator vor dir. Du kannst seine Eigenzustände  $\{|\varphi_i\rangle\}$  als Basis nehmen und damit jeden beliebigen anderen Zustand in dieser Basis darstellen.

## 18.2 Beispiele für Hermitesche Matrizen

Bei den meisten Operatoren, denen du im Grundstudium begegnen wirst, sind hermitesche Operatoren. Dazu gehört zum Beispiel der Impulsoperator  $\hat{p}$ , der Ortsoperator  $\hat{x}$ , der Hamilton-Operator  $\hat{H}$ , der kinetische Energieoperator  $\hat{W}_{\text{kin}}$  und so weiter.

Wie du im Kapitel ?? gelernt hast, können wir einen Operator als Matrix repräsentieren, wenn wir eine konkrete Basis wählen, in der wir den Operator darstellen. Schauen wir uns ein paar konkrete Beispiele für hermitesche Matrizen an.

Die  $\sigma_y$ -Spinmatrix ist hermitesch. Wenn du sie transponierst und komplex konjugierst, bekommst du die gleiche Matrix wieder zurück:

$$\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}^* = (\sigma_y)^* \quad (18.9)$$

Auch die  $\sigma_x$ -Spinmatrix ist eine hermitesche Matrix:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^* = (\sigma_x)^* \quad (18.10)$$

Und hier ein Beispiel für eine nicht-hermitesche Matrix. Wenn du sie transponierst und komplex konjugierst, dann bekommst du eine ganz andere Matrix, die nicht gleich der ursprünglichen Matrix ist:

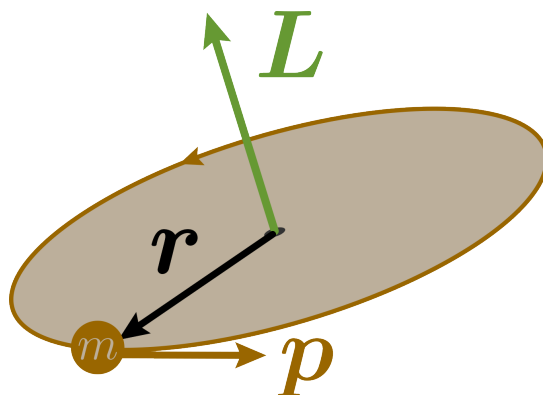
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3i & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3i & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 & 3i \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (18.11)$$

# 19. Quantenmechanischer Drehimpuls

Mehr: [de.fufaev.org/quantenmechanischer-drehimpuls](http://de.fufaev.org/quantenmechanischer-drehimpuls)

Der **Drehimpuls** (genauer: **Bahndrehimpuls**)  $L$  eines klassischen Teilchens ist gegeben durch das Kreuzprodukt zwischen dem **Abstand**  $\mathbf{r}$  des Teilchens von der Drehachse und dem linearen **Impuls**  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  des Teilchens:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{bmatrix} y p_z - z p_y \\ z p_x - x p_z \\ x p_y - y p_x \end{bmatrix} \quad (19.1)$$



Der Drehimpuls  $\mathbf{L}$  ist also wegen des Kreuzprodukts **senkrecht zu den Vektoren  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{p}$** .

Wenn wir das Kreuzprodukt ausschreiben, bekommen wir die einzelnen Komponenten  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  des Drehimpulsvektors, die jeweils den Betrag des Drehimpulses in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung angeben:

- Drehimpulsbetrag in  $x$ -Richtung ist:

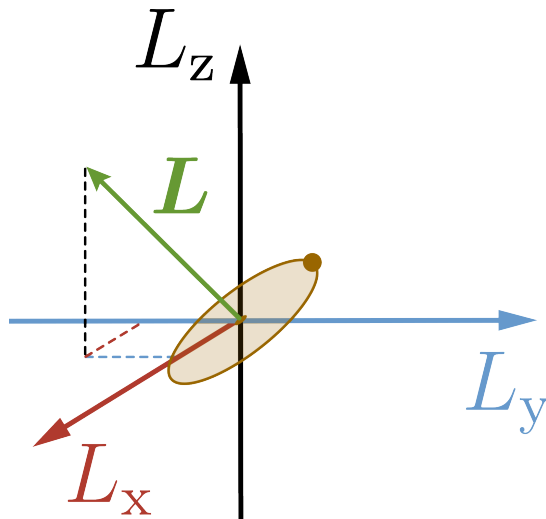
$$L_x = y p_z - z p_y \quad (19.2)$$

- Drehimpulsbetrag in  $y$ -Richtung ist:

$$L_y = z p_x - x p_z \quad (19.3)$$

- Drehimpulsbetrag in  $z$ -Richtung ist:

$$L_z = x p_y - y p_x \quad (19.4)$$



Wie machen wir aus diesen klassischen Drehimpulscomponenten **quantenmechanische** Drehimpulscomponenten? Indem wir Hütchen draufsetzen:  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$  und  $\hat{L}_z$ , also die Drehimpulscomponenten zu Operatoren



machen. Die Orte  $x = \hat{x}$ ,  $y = \hat{y}$  und  $z = \hat{z}$  bleiben gleich. Und die Impulskomponenten werden durch folgende **axiomatischen Zuordnungen** ersetzt:

- Impulskomponente  $p_x$  wird zum Operator:  $\hat{p}_x = -i\hbar \partial_x$
- Impulskomponente  $p_y$  wird zum Operator:  $\hat{p}_y = -i\hbar \partial_y$
- Impulskomponente  $p_z$  wird zum Operator:  $\hat{p}_z = -i\hbar \partial_z$

Hierbei sind  $\partial_x, \partial_y$  und  $\partial_z$  **Ableitungsoperatoren**. Angewendet auf eine Funktion, ergeben sie die Ableitung dieser Funktion nach  $x$ ,  $y$  oder  $z$ . Eine alleinstehende Ableitung macht natürlich wenig Sinn. Deshalb entfaltet ein Impulsoperator erst dann seine Wirkung, wenn er auf eine Wellenfunktion angewendet wird. Das Ergebnis ist eine neue, durch den Operator modifizierte Wellenfunktion. Mit den axiomatischen Zuordnungen haben wir den **klassischen Bahndrehimpuls quantisiert**:

- $\hat{L}_x = -i\hbar y \partial_z + i\hbar z \partial_y = i\hbar (z \partial_y - y \partial_z)$
- $\hat{L}_y = -i\hbar z \partial_x + i\hbar x \partial_z = i\hbar (x \partial_z - z \partial_x)$
- $\hat{L}_z = -i\hbar x \partial_y + i\hbar y \partial_x = i\hbar (y \partial_x - x \partial_y)$

## 19.1 Drehimpuls im Experiment messbar?

Wir haben die Drehimpulsoperatoren  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$  und  $\hat{L}_z$  konstruiert. Die Frage ist jetzt: Repräsentieren sie Observablen? Oder anders gesagt: **Sind sie hermitesche Operatoren?** Das ist wichtig, denn nur, wenn sie hermitesche Operatoren sind, können die Drehimpulskomponenten im Experiment gemessen werden.

Ein hermitescher Operator  $\hat{L}_x$  ist gleich seinem komplex Konjugierten  $\hat{L}_x^\dagger$ . Prüfen wir das mal:

$$\hat{L}_x^\dagger = (\hat{y} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y)^\dagger \quad (19.5)$$

Als erstes wenden wir die Eigenschaft der **Anti-Linearität** an:

$$\hat{L}_x^\dagger = (\hat{y}\hat{p}_z)^\dagger - (\hat{z}\hat{p}_y)^\dagger \quad (19.6)$$

Im nächsten Schritt **nutzen wir die Anti-Distributivität** aus. Dadurch werden die beiden Operatoren in der Klammer vertauscht und die Klammer verschwindet:

$$\hat{L}_x^\dagger = \hat{p}_z^\dagger \hat{y}^\dagger - \hat{p}_y^\dagger \hat{z}^\dagger \quad (19.7)$$

Wir wissen, dass die Ortsoperatoren  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  und Impulsoperatoren  $\hat{p}_z$ ,  $\hat{p}_y$  hermitesch sind. Hermitesche Operatoren sind **gleich ihrem Adjungierten**. Wir können also  $\dagger$  weglassen:

$$\hat{L}_x^\dagger = \hat{p}_z \hat{y} - \hat{p}_y \hat{z} \quad (19.8)$$

Die Impuls und Ortsoperatoren dürfen hier vertauscht werden, denn Operator  $\hat{p}_z = -i\hbar \partial_z$  nach der  $z$ -Koordinate ableitet und  $\hat{y} = y$  hängt nicht von  $z$  ab und wirkt daher wie eine Konstante, die vorgeschoben werden kann. Analog ist die Argumentation für den Term  $\hat{p}_y \hat{z}$ :

$$\hat{L}_x^\dagger = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = \hat{L}_x \quad (19.9)$$

Der erhaltene Ausdruck entspricht genau dem  $\hat{L}_x$  Operator. Analog können wir zeigen, dass auch der  $\hat{L}_y$  und der  $\hat{L}_z$  Operator hermitesch sind. Schlussfolgerung: **Wir können die Drehimpulskomponenten von Quantenteilchen im Experiment messen. Perfekt!**

## 19.2 Alle Drehimpulskomponenten exakt bestimmen?

In der **klassischen Physik**, in unserer makroskopischen Welt, existieren die Werte aller drei Drehimpulskomponenten  $L_x$ ,  $L_y$  und  $L_z$  - zum Beispiel eins

kreisenden Teilchens. Alle drei Komponenten können daher **exakt und gleichzeitig bestimmt** werden.

In der **Quantenwelt** dagegen, haben wir die **Heisenberg-Unschärferelation**, die es unmöglich macht, bestimmte Observablen gleichzeitig exakt zu bestimmen, weil eine der Observablen keinen exakten Wert von Natur aus besitzt, wenn die andere Observable exakt gemessen wird. Impuls  $\hat{p}_y$  und Ort  $\hat{x}$  sind ein Beispiel für zwei nicht gleichzeitig exakt bestimmbare Observablen.

Mathematisch formuliert, besagt die Heisenberg-Unschärferelation: Wenn wir als erstes den Ortsoperator  $\hat{x}$  auf die Wellenfunktion  $\Psi(x, y, z)$  anwenden und anschließend den Impulsoperator:  $\hat{p}_x \hat{x} \Psi(x, y, z)$ , dann kommt etwas anderes heraus als, wenn wir zuerst den Impulsoperator und anschließend den Ortsoperator anwenden:  $\hat{p}_x \hat{x} \Psi(x, y, z)$ . **Es spielt eine Rolle, ob wir zuerst den Ort oder den Impuls eines Quantenteilchens messen.** Sobald wir die Reihenfolge der Messung umdrehen, kommt für den Impuls und Ort etwas ganz anderes heraus. Wir sagen, der Impuls und Ort unterliegen der Heisenberg-Unschärferelation. Den **Unterschied der beiden Messungen liefert uns der Kommutator**  $[\hat{x}, \hat{p}_x]$ . Dazu bilden wir die Differenz der beiden Messungen und klammern die Wellenfunktion aus. Die Differenz der Operatoren ist der Kommutator von  $\hat{x}$  und  $\hat{p}_y$ :

$$\begin{aligned} \hat{p}_x \hat{x} \Psi - \hat{p}_x \hat{x} \Psi &= (\hat{p}_x \hat{x} - \hat{p}_x \hat{x}) \Psi & (19.10) \\ &= [\hat{x}, \hat{p}_x] \Psi \\ &= i \hbar \Psi \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir den Kommutator des Orts- und Impulsoperators  $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i \hbar$  benutzt.

- Wenn der Kommutator Null ist, dann ist es prinzipiell möglich, beide Observablen gleichzeitig exakt zu bestimmen.
- Wenn der Kommutator nicht Null ist, so wie im Fall von  $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i \hbar$ , dann ist es unmöglich beide Observablen gleichzeitig exakt zu bestimmen.

Es kann nur eine der Observablen, entweder  $\hat{p}_x$  oder  $\hat{x}$ , exakt bestimmt werden.

Mit dem Wissen können wir uns fragen: **Können wir alle Drehimpulskomponenten eines Quantenteilchens gleichzeitig exakt kennen?**

Kurze Antwort: **Nein!** Dazu müssen wir die Kommutatoren  $[\hat{L}_x, \hat{L}_z]$ ,  $[\hat{L}_y, \hat{L}_z]$  und  $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$  der Drehimpulskomponenten ausrechnen. Wir werden feststellen, dass keiner der Kommutatoren Null ist. Es ist daher unmöglich zwei Drehimpulskomponenten gleichzeitig zu kennen.

Schauen wir uns zur Demonstration den Kommutator  $[\hat{L}_x, \hat{L}_z]$  an und zeigen, dass  $\hat{L}_x$  und  $\hat{L}_z$  der Unschärferelation unterliegen. Als erstes nutzen wir die Definition des Kommutators:

$$\begin{aligned}
 [\hat{L}_x, \hat{L}_z] &= \hat{L}_x \hat{L}_z - \hat{L}_z \hat{L}_x & (19.11) \\
 &= (\hat{y} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y)(\hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x) \\
 &\quad - (\hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x)(\hat{y} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y) \\
 &= \hat{y} \hat{p}_z \hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_z \hat{y} \hat{p}_x - \hat{z} \hat{p}_y \hat{x} \hat{p}_y \\
 &\quad + \hat{z} \hat{p}_y \hat{y} \hat{p}_x - \hat{x} \hat{p}_y \hat{y} \hat{p}_z + \hat{x} \hat{p}_y \hat{z} \hat{p}_y \\
 &\quad + \hat{y} \hat{p}_x \hat{y} \hat{p}_z - \hat{y} \hat{p}_x \hat{z} \hat{p}_y
 \end{aligned}$$

Beim zweiten Gleichheitszeichen haben wir die Drehimpulsoperatoren mit Orts- und Impulsoperatoren ausgedrückt. Beim dritten Gleichheitszeichen haben wir die Klammern ausmultipliziert.

Dann vertauschen wir die Operatoren so, dass sich einige Terme wegheben. Im ersten Term können wir bedenkenlos  $\hat{x}$  an den Anfang stellen:  $\hat{x} \hat{y} \hat{p}_z \hat{p}_y$ , weil  $\hat{x}$  sowohl mit  $\hat{y}$  als auch mit  $\hat{p}_z$  kommutiert (deren Kommutator ist Null, daher dürfen wir sie hin- und herschieben). Den Operator  $\hat{p}_y$  können wir zwar bedenkenlos vor  $\hat{p}_z$  setzen:  $\hat{x} \hat{y} \hat{p}_y \hat{p}_z$ , aber nicht vor  $\hat{y}$ , denn der Kommutator von  $[\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar$  ist nicht Null. Daher müssen wir  $\hat{y}, \hat{p}_y$  mit  $i\hbar + \hat{p}_y \hat{y}$  ersetzen:

$\hat{x} (i\hbar + \hat{p}_y \hat{y}) \hat{p}_z = i\hbar \hat{x} \hat{p}_z + \hat{x} \hat{p}_y \hat{y} \hat{p}_z$ . Damit hebt sich der Term  $\hat{x} \hat{p}_y \hat{y} \hat{p}_z$  weg:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_z] &= i\hbar \hat{x} \hat{p}_z - \hat{y} \hat{p}_z \hat{y} \hat{p}_x - \hat{z} \hat{p}_y \hat{x} \hat{p}_y \\ &+ \hat{z} \hat{p}_y \hat{y} \hat{p}_x - \hat{x} \hat{p}_y \hat{y} \hat{p}_z + \hat{x} \hat{p}_y \hat{z} \hat{p}_y \\ &+ \hat{y} \hat{p}_x \hat{y} \hat{p}_z - \hat{y} \hat{p}_x \hat{z} \hat{p}_y \end{aligned} \quad (19.12)$$

Im Term  $\hat{y} \hat{p}_z \hat{y} \hat{p}_x$  können wir alle Operatoren bedenkenlos vertauschen und mit dem Term  $\hat{y} \hat{p}_x \hat{y} \hat{p}_z$  kürzen:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_z] &= i\hbar \hat{x} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y \hat{x} \hat{p}_y + \hat{z} \hat{p}_y \hat{y} \hat{p}_x \\ &+ \hat{x} \hat{p}_y \hat{z} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x \hat{z} \hat{p}_y \end{aligned} \quad (19.13)$$

Und auch im Term  $\hat{z} \hat{p}_y \hat{x} \hat{p}_y$  können Operatoren vertauscht werden, sodass der sich mit dem Term  $\hat{x} \hat{p}_y \hat{z} \hat{p}_y$  weghebt:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{x} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y \hat{y} \hat{p}_x - \hat{y} \hat{p}_x \hat{z} \hat{p}_y \quad (19.14)$$

Jetzt kommen wir wieder zu einem Term  $\hat{y} \hat{p}_x \hat{z} \hat{p}_y$ , wo die Vertauschung nicht einfach so möglich ist. Als erstes können wir  $\hat{y}$  und  $\hat{p}_x$  vertauschen:  $\hat{p}_x \hat{y} \hat{z} \hat{p}_y$  und dann  $\hat{z}$  mit  $\hat{p}_y$ , sodass wir folgenden Term haben:  $\hat{p}_x \hat{y} \hat{p}_y \hat{z}$ . Um nun  $\hat{y}$  mit  $\hat{p}_y$  zu vertauschen, müssen wir deren Produkt wegen des nicht verschwindenden Kommutators  $[\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar$  mit  $i\hbar + \hat{p}_y \hat{y}$  ersetzen:  $\hat{p}_x (i\hbar + \hat{p}_y \hat{y}) \hat{z} = i\hbar \hat{p}_x \hat{z} - \hat{p}_x \hat{p}_y \hat{y} \hat{z}$ . Damit wird der Kommutator zu:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{x} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y \hat{y} \hat{p}_x - i\hbar \hat{p}_x \hat{z} - \hat{p}_x \hat{p}_y \hat{y} \hat{z} \quad (19.15)$$

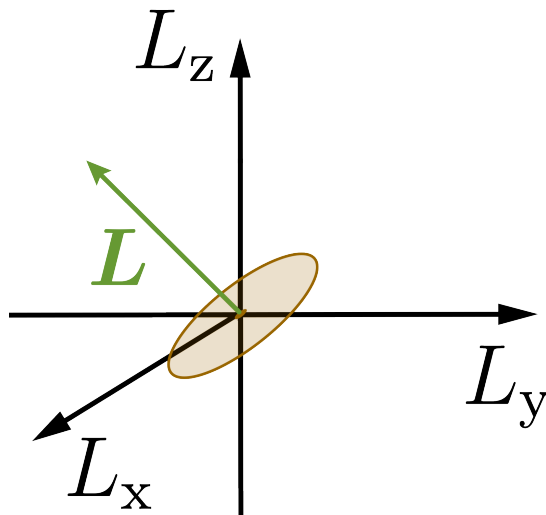
In diesem Term  $\hat{z} \hat{p}_y \hat{y} \hat{p}_x$  vertauschen wir noch  $\hat{z}$  mit  $\hat{p}_x$ :  $\hat{p}_x \hat{p}_y \hat{y} \hat{z}$  und können den so wegkürzen:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_z] &= i\hbar \hat{x} \hat{p}_z - i\hbar \hat{p}_x \hat{z} \\ &= i\hbar (\hat{x} \hat{p}_z - \hat{p}_x \hat{z}) \\ &= i\hbar \hat{L}_y \end{aligned} \quad (19.16)$$

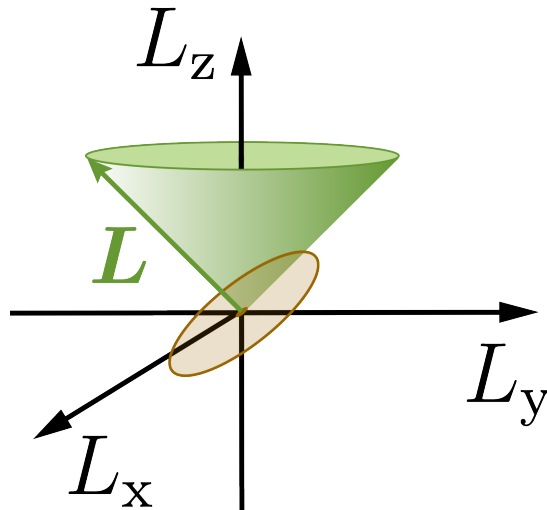
Wie du siehst, der Kommutator  $[\hat{L}_x, \hat{L}_z]$  ist nicht Null, damit ist es unmöglich  $\hat{L}_x$  und  $\hat{L}_z$  gleichzeitig beliebig genau zu kennen. Analog können wir die anderen beiden Kommutatoren herleiten:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_y, \hat{L}_z] &= i\hbar \hat{L}_x \\ [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= i\hbar \hat{L}_z \end{aligned} \quad (19.17)$$

Wir können diese prinzipielle Unbestimmtheit der Drehimpulskomponenten leicht veranschaulichen. Betrachten wir dazu ein klassisches Teilchen, das sich auf einer Kreisbahn bewegt. Es hat also einen Drehimpuls  $\mathbf{L}$ . Alle drei Drehimpulskomponenten sind exakt festgelegt, damit hat  $\mathbf{L}$  eine festgelegte Richtung.



Was ist, wenn es ein Quantenteilchen wäre? Nehmen wir mal an, wir haben die Drehimpulskomponente  $\hat{L}_z$  des Quantenteilchens gemessen. Damit haben wir seine Drehimpulskomponente  $L_z$  exakt festgelegt. Wegen der nicht verschwindenden Kommutatoren haben die anderen beiden Drehimpulskomponenten  $L_x$  und  $L_y$  keinen konkreten Wert. Die Richtung des Gesamtdrehimpulsvektors  $\mathbf{L}$  ist nicht mehr eindeutig gegeben, sondern liegt **irgendwo auf einem Kegelmantel**.



Anhand des Kegels in der Illustration können wir bereits erahnen, dass zwar die **Richtung von  $\mathbf{L}$  nicht eindeutig** ist, aber die **Länge des  $\mathbf{L}$ -Vektors eindeutig festgelegt** ist. Die Länge des  $\mathbf{L}$ -Vektors können wir mit der Summe der Quadrate der Drehimpulsoperatoren bestimmen:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \quad (19.18)$$

Diese Summe wird kurz als  $\hat{L}^2$ -Operator notiert. Dieser Operator ist hermitesch, repräsentiert also eine Observable, nämlich die **Länge des Drehimpulsvektors zum Quadrat**. Und das Tolle ist: Dieser Operator **kommutiert mit jeder Drehimpulskomponente  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$  und  $\hat{L}_z$** . Das ist sehr gut, denn damit können wir nicht nur eine der Drehimpulskomponenten eines Quantenteilchens exakt bestimmen, sondern auch den **Betrag des Gesamtdrehimpulses**:

$$\hat{L} = \sqrt{\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2} \quad (19.19)$$

Das wäre sehr schlimm für die Physik, wenn der Betrag des Gesamtdrehimpulses nicht jederzeit exakt existieren würde. Ohne einen festen, exakten Gesamtdrehimpuls würde der Drehimpulserhaltungssatz in der Quantenmechanik gar nicht funktionieren.

### 19.3 Drehimpulsquantenzahlen $l$ und $m$

Nutzen wir die Bra-Ket-Notation und fassen Operatoren als Matrizen und Wellenfunktionen als Ket-Vektoren (Zustände) auf. Ein Kommutator verrät uns nicht nur, ob zwei Observablen gleichzeitig genau messbar sind, sondern auch, ob die dazugehörigen Operatoren **gemeinsame Eigenzustände**  $\{|\Psi_i\rangle\}$  haben.

Wenn der Kommutator  $[\hat{L}^2, \hat{L}_z]$  verschwindet (und das tut er), dann wissen wir, dass es einen Zustand  $|\Psi\rangle$  gibt, der gleichzeitig sowohl ein Eigenzustand von  $\hat{L}^2$  als auch ein Eigenzustand von  $\hat{L}_z$  ist.

- Wenn  $\hat{L}^2$ -Operator auf den Zustand  $|\Psi\rangle$  angewendet wird, der ein Eigenzustand dieses Operators ist, dann ist das Ergebnis ein mit dem Eigenwert skaliertes Eigenzustand: Im Fall von  $\hat{L}^2$  gibt der Eigenwert den Betrag des Gesamtdrehimpulses zum Quadrat:

$$\hat{L}^2 |\Psi\rangle = L^2 |\Psi\rangle \quad (19.20)$$

- Und wenn  $\hat{L}_z$  auf den Zustand  $|\Psi\rangle$  angewendet wird, der auch ein Eigenzustand von  $\hat{L}^2$  ist, dann bekommen wir wieder den skalierten Eigenzustand mit einem anderen Eigenwert heraus. Dieser Eigenwert repräsentiert im Fall von  $\hat{L}_z$  den Betrag der Drehimpulskomponente in  $z$ -Richtung:

$$\hat{L}_z |\Psi\rangle = L_z |\Psi\rangle \quad (19.21)$$

Mithilfe der sogenannten **Leiteroperatoren** können wir die Eigenwerte  $L^2$  und  $L_z$  etwas genauer bestimmen. Ich gebe hier das berühmte Ergebnis an, das wahrscheinlich jeder Chemiker kennt. Die **Eigenwerte  $L^2$  sind ein Vielfaches von  $\hbar^2$** :

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 |\Psi\rangle &= L^2 |\Psi\rangle \\ &= l(l+1)\hbar^2 |\Psi\rangle \end{aligned} \quad (19.22)$$



Der Eigenwert  $l(l+1)\hbar^2$  wird durch eine **ganzzahlige oder halbzahlige Zahl**  $l$  bestimmt, die wir als **Drehimpulsquantenzahl** bezeichnen. Diese Quantenzahl kann folgende Werte annehmen:

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (19.23)$$

Folglich kann der Gesamtdrehimpuls zum Quadrat  $L^2$  keinen beliebigen kontinuierlichen Wert annehmen, sondern nur folgende diskrete Werte, die durch die Drehimpulsquantenzahl festgelegt sind:

$$L^2 = 0, 0.75\hbar^2, 2\hbar^2, 3.75\hbar^2, 6\hbar^2, \dots \quad (19.24)$$

Ziehen wir die Wurzel aus dem Betragsquadrat. Der **Betrag**  $L$  **des Gesamtdrehimpulses ist quantisiert**:

$$L = 0, \sqrt{0.75}\hbar, \sqrt{2}\hbar, \sqrt{3.75}\hbar, \sqrt{6}\hbar, \dots \quad (19.25)$$

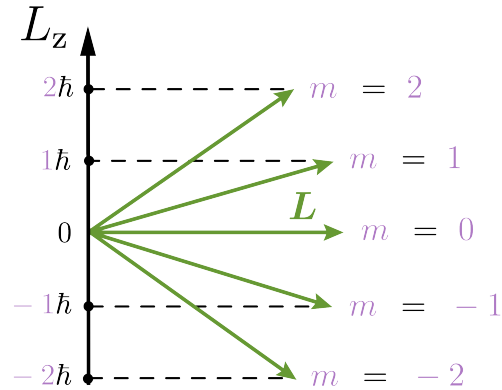
Die **Eigenwerte**  $L_z$  **des**  $\hat{L}_z$ -**Drehimpulsoperators sind ein Vielfaches von**  $\hbar$ :

$$\begin{aligned} \hat{L}_z |\Psi\rangle &= L_z |\Psi\rangle \\ &= m\hbar |\Psi\rangle \end{aligned} \quad (19.26)$$

Die Quantenzahl  $m$  wird als **magnetische Quantenzahl** bezeichnet und sie kann nur Werte zwischen  $m = -l$  und  $m = l$  annehmen und zwar in  $+1$  Schritten. Die  $\hat{L}_z$ -Drehimpulskomponente kann also keine kontinuierlichen Werte wie in der klassischen Physik annehmen - die  $\hat{L}_z$ -Drehimpulskomponente ist quantisiert.

**Beispiel:** Wenn ein Quantenteilchen einen Gesamtdrehimpuls  $L = 2(2+1)\hbar^2 = 6\hbar^2$  hat, repräsentiert durch die Drehimpulsquantenzahl  $l = 2$ , dann kann seine magnetische Quantenzahl  $m = -2, -1, 0, 1, 2$  Werte annehmen und keine anderen. Die  $L_z$ -Drehimpulskomponente dieses

Quantenteilchens kann nur 5 mögliche Werte haben:  $L_z = -2\hbar, -1\hbar, 0, 1\hbar, 2\hbar$ .



Fassen wir zusammen, was du aus dem Kapitel 19 mitnehmen solltest:

- Du weißt jetzt, wie man **klassischen Drehimpuls quantisiert**.
- Du weißt, wie man zeigt, dass die **Drehimpulskomponenten hermitesch** sind.
- Du hast gelernt, dass **alle Drehimpulskomponenten der Unschärferelation unterliegen** und warum nur eine der Komponenten exakt bestimmt werden kann.
- Du hast gelernt, wie man **mit Drehimpulskommutatoren arbeitet**.
- Du weißt, wofür der  $\hat{L}^2$ -Operator gut ist.
- Du kennst die möglichen Eigenwerte von  $\hat{L}_z$  und  $\hat{L}^2$ .

# Ende

Wenn dir das Buch gefallen hat, wäre es cool, wenn du eine **kurze Rezension auf Amazon** schreibst und das Buch bewertest. Das Buch findest du auf der folgenden Amazon-Seite: [amazon.de/dp/B0CY2S4HKF](https://www.amazon.de/dp/B0CY2S4HKF).

Bitte **sende mir auch jeden Fehler, Verbesserungsvorschlag oder unverständlichen Abschnitt** per E-Mail an [alexander@fufaeV.org](mailto:alexander@fufaeV.org), damit ich ihn schnellstmöglich korrigieren kann.

Möge die Physik mit dir sein!

A. FufaeV



## Formeln der Physik: Mit denen du jede Aufgabe löst



- Perfekt **für** experimentelle Physik und für Physik-LK.
- Enthält **über** illustrierte 500 Formeln.
- Enthält nützliche Wertetabellen.
- **Leicht zu benutzen**, weil ohne Vektoren und Integrale.

Formelsammlung holen: [de.fufaev.org/formelsammlung](http://de.fufaev.org/formelsammlung)

# Das Tagebuch von Alexander Fufaev



- Wie bin ich **finanziell frei** geworden?
- Wie kam ich überhaupt auf Physik?
- Welche **Schwierigkeiten** hatte ich **im Studium**?
- Wie habe ich **meine Seelenaufgabe** gefunden?
- Eine Lebensgeschichte **mit vielen Learnings**.

**Tagebuch holen:** [de.fufaev.org/tagebuch](http://de.fufaev.org/tagebuch)

PUBLIZIERT ALS SELBSTVERLEGER

ISBN FÜR TASCHENBUCH: 9798884791633

ISBN FÜR GEBUNDENES PREMIUM-BUCH: 9798884801080

IMPRESSUM

Alexander Fufaev

Peiner Straße 86

31137 Hildesheim, Deutschland

[alexander@fufaev.org](mailto:alexander@fufaev.org)

[FUFAEV.ORG](http://FUFAEV.ORG)

Copyright © 2024 Alexander Fufaev

*Veröffentlicht, März 2024*